



## Några blandade tillämpningar

Här är några blandade tillämpningar av innehållet i kursen. Många av dessa uppgifter är hämtade från gamla tentor.

**Uppgift 1.** Av tre likadana plankor, 1 meter långa och 10 cm breda, ska göras en enkel ränna. Hur ska vinkeln mellan plankorna väljas för att rännan ska rymma så mycket som möjligt?

**Uppgift 2.** En mjölkförpackning med temperaturen  $4^\circ\text{C}$  tas ur kylskåpet och placeras i ett rum med konstant temperatur  $20^\circ\text{C}$ . Efter 12 minuter har mjölken antagit temperaturen  $12^\circ\text{C}$ . Efter hur lång tid ytterligare har mjölkens temperatur nått  $18^\circ\text{C}$ ?  
*Använd Newtons avkylningslag, dvs att mjölkens temperaturförändring per tidsenhet är proportionell mot skillnaden i temperatur mellan rummet och mjölken.*

**Uppgift 3.** En sfärisk behållare med radie  $R$  m fylls med vatten i en takt av  $v$   $\text{m}^3$  per minut. Hur snabbt, dvs med hur många meter per minut, stiger vattenytan vid den tidpunkt då vattennivån är  $R/4$  över behållarens lägsta punkt?

**Uppgift 4.** En partikel startar i vila och rör sig utefter en rät linje med accelerationen  $100 \cos t$   $\text{m/s}^2$  vid tidpunkten  $t$  s. Vilken är partikelns hastighet och position vid tiden  $t = 3$  s?

**Uppgift 5.** En vattenreservoar har förorenats av ett giftigt ämne. En naturlig rening sker genom att rent vatten rinner in i reservoaren samtidigt som förorenat vatten rinner ut i samma takt. I en modell över förloppet antas att koncentrationen  $K(t)$  av det giftiga ämnet vid tiden  $t$  s uppfyller differentialekvationen

$$\frac{dK(t)}{dt} = -\frac{K(t)}{1500}.$$

Hur lång tid tar det, enligt modellen, för koncentrationen av ämnet att halveras?

**Uppgift 6.** Ett fordon startar från stillastående och kör 30 minuter rakt framåt med accelerationen  $2 + 60t$  km/h<sup>2</sup>. Vad är fordonets hastighet efter 30 minuter? Hur långt hinner fordonet?

**Uppgift 7.** Vid ett test med ett nytt fordon ska man köra en sträcka om 10 km, där olika delar av sträckan ska köras vid olika hastigheter. Anta att hastigheten efter  $x$  körda km ska vara  $v(x)$  km/h. Hur lång tid tar testet?

**Uppgift 8.** En 2 m lång cylindrisk stång med radie 0.1 m är gjord i ett material med variabel densitet. Om vi placerar stången längs en  $x$ -axel mellan punkterna 0 och 2 så varierar densiteten  $\rho$  med avståndet  $x$  till ena änden av stången enligt formeln

$$\rho(x) = 1 - \frac{(x-1)^2}{4} \text{ kg/m}^3.$$

Beräkna stångens massa.

**Uppgift 9.** En stillastående bil startar från ett trafikljus och ökar farten med konstant acceleration upp tills farten är 25 m/s. Därefter fortsätter bilen med den konstanta hastigheten 25 m/s. Efter 23 s har bilen tillryggalagt sträckan 500 m. Hur lång tid efter starten nådde bilen farten 25 m/s?

**Uppgift 10.** En kropp med massan  $m$  rör sig rätlinjigt med hastigheten  $v(t)$ . Den utsätts för en bromsande kraft  $-kv(t)$ , där  $k$  är en positiv konstant. Om vi antar att inga andra krafter påverkar kroppen så gäller att

$$m \frac{dv}{dt} = -kv(t).$$

Bestäm hastigheten som funktion av tiden, om  $k = 1$ ,  $m = 2$  kg och  $v(0) = 5$  m/s. Avgör sedan också hur lång sträcka kroppen rör sig efter tidpunkten  $t = 0$ .

**Uppgift 11.** Differentialekvationen  $\frac{du}{dt} = -\frac{u}{RC}$  beskriver spänningen  $u$  vid tiden  $t$  när en kondensator med kapacitans  $C$  laddas ur över ett motstånd med resistans  $R$ . Lös differentialekvationen och avgör hur lång tid det tar för spänningen att gå ner till halva sitt startvärde (förutsatt att startvärdet var positivt).

**Uppgift 12.** Befolkningarna i länderna A och B växer båda exponentiellt. I A är fördubblingstakten 50 år och i B 150 år. idag bor det dubbelt så många människor i B som i A. Hur länge dröjer det innan A är ikapp B när det gäller folkmängd?

## FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1.  $4\pi/3$  (Lösningförslag finns, tentamen 2013-10-26)
2. Efter ytterligare 24 minuter (Lösningförslag finns, tentamen 2014-01-11)
3. Vattenytan stiger med hastigheten  $16v/(7\pi R^2)$  meter per minut (Lösningförslag finns, tentamen 2012-12-10)
4. Hastigheten är  $100 \sin 3$  m/s och positionen är  $100(1 - \cos 3)$  m.
5.  $1500 \ln 2$  s. (Lösningförslag finns, tentamen 2012-02-11)
6. Efter en halvtimme är hastigheten 8.5 km/h och fordonet har kört 1.5 km.
7. Tiden det tar är  $\int_0^{10} \frac{1}{v(x)} dx$  h.
8. Stången massa är  $11\pi/600$  kg. (Lösningförslag finns, tentamen 2011-12-15)
9. 6 sekunder. (Lösningförslag finns, tentamen 2011-10-18)
10.  $v(t) = 5e^{-t/2}$ . Sträckan är 10 m. (Lösningförslag finns, tentamen 2011-08-25)
11.  $u(t) = ke^{-t/RC}$  där  $k$  är en godtycklig konstant. Spänningen har halverats efter tiden  $RC \ln 2$ . (Lösningförslag finns, tentamen 2014-10-24)
12. 75 år. (Lösningförslag finns, tentamen 2009-12-19)