Institutionen för Matematik

SF1625
Envariabelanalys
Läsåret 2015/2016

Modul 7: Plana kurvor, talföljder och serier

Denna modul omfattar kapitel 8.1, 8.2, 8.5 och 9.1-9.3 i kursboken Calculus av Adams och Essex och undervisas på tre föreläsningar och två övningar.

Viktiga begrepp. Denna modul handlar om **kurvor i planet** och om **talföljder och serier**. Kurvorna i planet kommer att vara viktiga hjälpmedel i kursen i flervariabelanalys som kommer senare. Just nu läser vi detta bara översiktligt som orientering. Det viktigaste för oss nu är taIföljder och framför allt serier. Två viktiga begrepp som man måste ha koll på är **konvergens** och **divergens**. Det är också viktigt att lära sig hur man kan avgöra om en serie är konvergent eller divergent. Ofta använder man jämförelsesatser. En viktig sats är Cauchys integralkriterium som säger att man under vissa betingelser kan jämföra med en integral.

Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus. Kapitel 8.1: 1, 3, 5. Kapitel 8.2: 1, 7. Kapitel 8.5: 9, 13. Kapitel 9.1: 1, 3, 17. Kapitel 9.2: 1, 5. Kapitel 9.3: 1, 3, 27, 29, 35.

KAN DU DET HÄR TILLRÄCKLIGT BRA? TESTA DIG SJÄLV!

Uppgift 1. Ange en ekvation för en ellips runt origo med halvaxlar 3 och 4. Finns det mer än ett alternativ?

Uppgift 2. Rita dessa kurvor.

A. $x^2 + 2y^2 = 4$
B. $x + y^2 = 1$
C. $x^2 = 1 + y^2$

Uppgift 3. Parametrisera dessa kurvor.

A. $x^2 + y^2 = 2$
B. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$
C. $y^2 = x + 1$

Uppgift 4. Avgör om nedanstående serier är konvergenta eller divergenta. Tips: går termerna mot 0?

A. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{k}$

B. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\arctan k}$

Uppgift 5. Avgör om nedanstående serier är konvergenta eller divergenta. Kan du beräkna dem?

A. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

B. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

C. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j}$

Uppgift 6. Avgör om nedanstående serier är konvergenta eller divergenta, genom att jämföra med lämplig serie eller med en integral. Du behöver inte beräkna dem.

A. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{10}{k\sqrt{k}}$

B. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + e^k}$

C. $\displaystyle\sum_{j=4}^{\infty} \frac{1+j+\ln j}{j^2-1}$

Uppgift 7. Avgör om nedanstående serie är konvergent eller divergent, genom att jämföra med en lämplig integral.

$\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$

Uppgift 8. Visa att

$$\frac{1}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < \frac{\pi+1}{2}.$$

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ (Det finns fler alternativ)

2. Rita på. Det är en ellips, en parabel och en hyperbel

3. A. TEx: $x = \sqrt{2}\cos t,\ y = \sqrt{2}\sin t,\ t \in \mathbb{R}$
3. B. $x = 1 + 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ 0 \le t < 2\pi$
3. C. $x = t^2 - 1,\ y = t,\ t \in \mathbb{R}$

4. Båda serierna är divergenta

5. Alla tre serierna är konvergenta
5. A. 2
5. B. $1/2$. Tips: bryt ut $1/2^2$ och använd formeln för geom summa på det som är kvar.
5. C. $\frac{1}{e-1}$. Tips: $e^{-j} = (1/e)^j$

6. A. Konvergent. 6B. Konvergent. 6.C. Divergent

7. Divergent

8. Använd integraluppskattning. De båda bilderna i beviset av sats 8 i kapitel 9.3 på sidan 511 säger precis vad man ska göra här!