



## Uppgifter till Seminarium 4

Se [www.kth.se/social/course/SF1625](http://www.kth.se/social/course/SF1625) för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna. **Detta seminarium inleds med ett skriftligt prov.** På provet får du lösa en uppgift som liknar någon av seminarieuppgifterna nedan eller någon av de rekommenderade uppgifterna ur kursboken Calculus av Adams och Essex (8:e upplagan). De rekommenderade uppgifterna ur Calculus är

Kapitel 4.1: 5, 7, 9, 16, 17. Kapitel 4.2: 7, 9. Kapitel 4.3: 1, 5, 17. Kapitel 4.4: 3, 14, 29, 35. Kapitel 4.5: 5, 11, 27, 31. Kapitel 4.6: 3, 5, 9, 17, 31. Kapitel 4.8: 1, 7, 13, 21. Kapitel 4.9: 1, 3, 13, 30. Kapitel 4.10: 1, 5, 9

---

### SEMINARIEUPPGIFTER

**Uppgift 1.** Låt  $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ .

- A. Bestäm definitionsmängden till  $f$ .
- B. I vilka punkter är  $f$  kontinuerlig?
- C. På vilka intervall är  $f$  strängt växande respektive strängt avtagande?
- D. Bestäm alla lokala extrempunkter till  $f$ .
- E. Beräkna gränsvärdena  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  och  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- F. Skissa funktionsgrafén  $y = f(x)$ .

**Uppgift 2.** Låt  $h(t) = t + \cos t$ .

- A. Bestäm alla kritiska punkter till  $h$ .
- B. Bestäm alla lokala extrempunkter till  $h$ .
- C. Avgör om  $h$  antar något största respektive minsta värde och ange de intervall där  $h$  är strängt växande respektive strängt avtagande.

**Uppgift 3.** Bestäm alla asymptoter till kurvan  $y = \frac{2 + x^2}{x}$ .

**Uppgift 4.** Man konstruerar en cylindrisk burk med botten och lock. Den totala arean av burkens begränsningsyta är  $A$ . Hur ska man välja burkens höjd och bottenradie för att maximera burkens volym?

**Uppgift 5.** Låt  $f(x) = xe^{-x^2/2}$ . Bestäm de intervall där  $f$  är konvex (concave up) respektive konkav (concave down).

**Uppgift 6.** Låt  $f(x) = e^x$ .

- A. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till  $f$  kring punkten  $x = 0$ .
- B. Använd Taylorpolynomet ovan för att approximera  $1/\sqrt{e}$ , dvs  $f(-1/2)$ .
- C. Avgör om felet i approximationen i uppgift B är mindre än  $1/25$ .

**Uppgift 7.** Låt  $g(t) = \sqrt{t}$

- A. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till  $g$  kring punkten  $t = 25$ .
- B. Använd Taylorpolynomet ovan för att approximera  $\sqrt{26}$ .
- C. Avgör om felet i approximationen i uppgift B är mindre än  $1/1000$ .

**Uppgift 8.** Betrakta ekvationen  $x^5 + x - 1 = 0$

- A. Visa med hjälp av derivata att ekvationen har högst en lösning.
- B. Visa med hjälp av satsen om mellanliggande värden att ekvationen har minst en lösning som ligger mellan 0 och 1.
- C. Finn en approximation av lösningen genom att välja ett lämpligt startvärde och göra två iterationer av Newton-Raphsons metod.

**Uppgift 9.** Beräkna följande gränsvärden.

A.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+h}}{h}$

B.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{x^2}$

**Uppgift 10.** En sfärisk tank med radie 5 dm fylls med vatten i en takt av 3 liter per minut. Hur snabbt stiger vattenytan i tanken vid den tidpunkt då djupet är 2 dm? Tips: Vattenvolymen  $V$  beror på vattendjupet  $d$  enligt formeln

$$V = \pi \frac{15d^2 - d^3}{3}.$$

**Uppgift 11.** Avgör om funktionen  $f$  som ges av  $f(x) = x \ln x$  antar något största respektive minsta värde när  $x$  varierar i intervallet  $1 \leq x \leq 5$  och bestäm i så fall dessa.

## DISKUSSIONSUPPGIFTER

Här är några extra uppgifter att diskutera vid seminariet. Lösningar behöver inte skrivas ner i förväg.

- Avgör om  $f(x) = |x - 1| + \sqrt{x + 1}$  antar något största respektive minsta värde när  $x$  varierar i intervallet  $[-1, 2]$  och bestäm i så fall dessa.
- Ett flygplan flyger rakt med konstant hastighet 600 km/h och konstant höjd 5 km. Vid ett tillfälle passerar flygplanet rakt ovanför ett hus. Hur snabbt ändras avståndet mellan flygplanet och huset 1 minut senare?
- Visa att ekvationen  $2 \arctan x = 6 - 3x$  har exakt en lösning och att lösningen ligger i intervallet  $[1, 2]$ . Använd Newton-Raphsons metod för att approximera lösningen.
- Finns det någon funktion som har definitionsmängd  $\mathbf{R}$  och som har ett globalt extremvärde i origo utan att derivatan i origo är noll? Ge exempel på en sådan funktion eller visa att ingen sådan funktion finns.
- Finns det någon funktion som har definitionsmängd  $\mathbf{R}$  och som saknar ett globalt extremvärde i origo trots att derivatan i origo är noll? Ge exempel på en sådan funktion eller visa att ingen sådan funktion finns.
- Finns det någon funktion som har definitionsmängd  $\mathbf{R}$  och som är strängt växande utan att derivatan är positiv överallt? Ge exempel på en sådan funktion eller visa att ingen sådan funktion finns.
- Finns det någon funktion som har definitionsmängd  $\mathbf{R}$  och som inte är strängt växande, trots att derivatan är positiv överallt? Ge exempel på en sådan funktion eller visa att ingen sådan funktion finns.
- Bestäm värdena på konstanterna  $a$ ,  $b$  och  $c$  så att
$$|ae^{bx+cx^2} - 2x^2 - 4| \leq 10^{-4} \quad \text{då } |x| \leq 0.1.$$
- Visa att  $x((\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 6 \ln x) \geq 6(x - 1)$  för alla  $x > 0$ .