Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1633, Differentialekvationer I
Kompletteringsentamen, torsdagen den 11 juni 2015 kl 14.15 – 15.45
Lösningsförslag

Modul 1. En liten mängd av ett radioaktivt ämne togs in i ett laboratorium för ett experiment. Ämnet sönderfaller enligt lagen för det radioaktiva sönderfallet som säger att sönderfallshastigheten är propotionell mot ämnets massa. Efter 1 timme blev ämnets massa 30 gram och efter 2 timmar blev ämnets massa 20 gram.

(a) Bestäm ekvation som uttrycker ämnets massa som funktion av tiden. Vad är ursprungliga massan av ämnet?

(b) Bestäm ämnets massa efter 3 timmar.

(c) Bestäm halveringstid av ämnet d v s den tiden efter vilken hälften av en given mängd av ämnet sönderfaller.

Lösning.

(a) Vi betecknar med $M(t)$ massan av ämnet efter t timmar. Att sönderfallshastigheten är propotionell mot ämnets massa innebär att funktionen $M(t)$ uppfyller differentialekvationen

$$\frac{dM}{dt} = -kM(t),$$

där k är någon konstant. Det är en separabel ekvation, vi skriver om den som $\frac{dM}{M} = -k$ varav integreringen ger oss $\ln M(t) = c - kt$ och $M(t) = Ce^{-kt}$ (vi betecknar $C = e^c$). För att bestämma konstanter C och k använder vi oss av data i uppgiften. Vi har $M(1) = 30$ och $M(2) = 20$ vilket ger oss ekvationer

$$Ce^{-k} = 30; \qquad Ce^{-2k} = 20.$$

Division av den första ekvation med den andra ger oss $e^k = 3/2$ varav $k = \ln(3/2)$. Insättning av $e^{-k} = 2/3$ till första ekvationen ger oss $C = 45$. Vi får

$$M(t) = 45e^{-kt}, \quad \text{där} \quad k = \ln(3/2).$$

Ursprungliga massan av ämnet är $M(0) = 45$.

(b) Efter 3 timmar får vi

$$M(3) = 45e^{-3\ln(3/2)} = 45 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{40}{3}.$$

(c) Halveringstid T uppfyller sambandet $M(t+T) = \frac{1}{2}M(t)$ vilket ger oss ekvation $e^{-kT} = 1/2$. Vi får $kT = \ln 2$ och

$$T = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{\ln(3/2)}.$$

Modul 2. Undersök system av differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, där

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm allmän lösning till systemet.

(b) Origo är en kritisk punkt för systemet. Vilken typ av fasporträtt har systemet nära origo? Är origo en stabil eller instabil kritisk punkt? Du behöver inte rita någon bild.

(c) Finns det någon lösning $\mathbf{X}(t)$ av systemet som uppfyller

$$\lim_{t \to 0} \mathbf{X}(t) = 0\,?$$

Ange en sådan lösning om den finns.

Lösning.

(a) Vi börjar med att bestämma egenvärdena och egenvektorer av matrisen A. Karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 6 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 15.$$

Den har rötter $\lambda_1 = 5$ och $\lambda_2 = -3$. Det är egenvärdena av matrisen.

Den första egenvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (den som hör till $\lambda_1 = 5$) uppfyller ekvation $(A - 5I)\mathbf{v}_1 = 0$ vilket ger oss ekvation $-6a + 6b = 0$ (den andra ekvation för a, b är ekvivalent till den). Vi får $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och detta ger oss den första lösningen till ursprungliga systemet

$$\mathbf{X}_1(t) = e^{5t}\mathbf{v}_1 = e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den andra egenvektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ (den som hör till $\lambda_2 = -3$) uppfyller ekvation $(A + 3I)\mathbf{v}_2 = 0$ vilket ger oss ekvation $2c + 6d = 0$ (den andra ekvation för c, d är samma). Vi får $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ och detta ger oss den andra lösningen till ursprungliga systemet

$$\mathbf{X}_2(t) = e^{-3t}\mathbf{v}_2 = e^{-3t}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Allmänna lösningen är godtycklig linjär kombination av $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$:

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Egenvärdena erhålna i (a) är reella och de har olika tecknar. Detta ger oss att origo är en sadelpunkt. Den är instabil.

(c) Lösningen $\mathbf{X}_2(t)$ erhållen i (a) uppfyller kravet.

Modul 3. En funktion $y = 2x + 1$ är definierad på intervallet $-1 < x < 1$. Funktionen utvecklas i en fourierserie på detta intervall.

(a) Vad är utseendet av erhållna fourierserien? Bestäm koefficienten a_0 (övriga koefficienter behöver inte beräknas).

(b) Vad är summan av erhållna fourierserien på intervallet $1 < x < 3$? Vad är summan i punkten $x = 3$?

(c) För erhållna fourierserien, visa att alla koefficienter $a_n = 0$ då $n = 1, 2, \ldots$. Försök att undvika långa uträkningar!

Lösning.

(a) Intervallet har utseendet $(-1, 1)$ d v s $(-p, p)$ med $p = 1$. Detta ger oss Fourierserien

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\pi n x) + b_n \sin(\pi n x))$$

som har perioden $T = 2$.

Koefficienten a_0 är

$$a_0 = \int_{-1}^{1} (2x + 1)\, dx = 2.$$

(b) Erhålna fourierserien har perioden 2. Om $1 < x < 3$, då är $-1 < x - 2 < 1$. Ursprungliga funktionen $y(x)$ i alla punkter i intervallet $(-1, 1)$ är kontinuerlig och deriverbar och konvergenssatsen ger oss att fourierserien i punkten $x - 2$ konvergerar till den ursprungliga funktionen. Vi får då för summan $F(x)$

$$F(x) = F(x - 2) = 2(x - 2) + 1 = 2x - 3$$

i intervallet $1 < x < 3$.

I punkten $x = 3$ den 2-periodiska fotsättningen av $y(x)$ är diskontinuerlig. Konvergenssatsen ger oss att summan blir

$$F(3) = F(1) = \frac{y(1-) + y(1+)}{2} = \frac{y(1-) + y(-1+)}{2} = \frac{2 \cdot 1 + 1 + 2 \cdot (-1) + 1}{2} = 1$$

(övergång från $y(1+)$ till $y(-1+)$ behövs för att hamna i intervallet $(-1, 1)$).

(c) Vi skriver om fourierserien som

$$F(x) - \frac{a_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\pi n x) + b_n \sin(\pi n x)).$$

Eftersom $a_0 = 2$, får vi på intervallet $-1 < x < 1$ ekvation

$$2x = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\pi n x) + b_n \sin(\pi n x))$$

d v s högerled är fourierserien av funktionen $y = 2x$. Eftersom den är udda, avgör vi att alla koefficienter $a_n = 0$ då $n = 1, 2, \ldots$.