SF1611 Introduktionskurs i matematik. 1,5 hp
Lösningsförslag till tentamen 29 augusti 2014. Skrivtid: 60 minuter. Inga hjälpmedel

Uppgifterna är värda 1 poäng vardera och kräver endast svar, inga fullständiga resonemang. För godkänt krävs 5 poäng.

Namn:...Pers.nr...................................Program.............

Resultat:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	**Betyg**

---

1. Skriv med ord hur följande påstående uttalas. $\forall x \in \mathbb{R}\ (\sqrt{x} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{N})$
   Svar: *För alla reella x gäller att roten ur x är rationellt om och endast om roten ur x är ett naturligt tal*

---

2. Skriv mängden $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq x^2\}$ som ett intervall.
   Svar: $[0, 1]$

---

3. Ange ett andragradspolynom som har konstanttermen 2 och nollställena -1 och 1.
   Svar: $-2x^2 + 2$

---

4. Utför polynomdivisionen
$$\frac{2x^3 - x + 1}{x + 1}.$$
   Svar: $2x^2 - 2x + 1$

---

5. Ange ett heltal $n < 10$ sådant att $|n + 1| > 10$.
   Svar: $n = -12$ (eller vilket heltal som helst som är mindre)

---

6. Förenkla $\ln \sqrt{e^3}$ så långt det går.
   Svar: $3/2$

7. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $\sin^2 x = 1$.
   Svar: $x = \pi\big(\frac{1}{2} + n\big)$, där n löper över alla heltal.

---

8. Fyll i luckan i följande bevis för att $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1)n = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$ för alla positiva heltal n.

Vi gör induktion över n. Om $n = 1$ är påståendet sant för då har summan inga termer och högerledet är noll. Under antagandet att påståendet gäller för n ska vi nu visa att det gäller för $n+1$. Vi har $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \big(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n\big) + n(n+1)$ vilket enligt induktionsantagandet är lika med

$$\frac{1}{3}(n-1)n(n+1) + n(n+1).$$

Bryter vi ut $\frac{1}{3}n(n+1)$ får vi $\frac{1}{3}n(n+1)\big((n-1)+3\big) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$, så påståendet gäller även för $n+1$.