Institutionen för Matematik

SF1625
Envariabelanalys
Läsåret 2015/2016

Uppgifter till Seminarium 4

Se www.kth.se/social/course/SF1625 för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna. **Detta seminarium inleds med ett skriftligt prov.** På provet får du lösa en uppgift som liknar någon av seminarieuppgifterna nedan eller någon av de rekommenderade uppgifterna ur kursboken Calculus av Adams och Essex (8:e upplagan). De rekommenderade uppgifterna ur Calculus är

Kapitel 4.1: 5, 7, 9, 16, 17. Kapitel 4.2: 7, 9. Kapitel 4.3: 1, 5, 17. Kapitel 4.4: 3, 14, 29, 35. Kapitel 4.5: 5, 11, 27, 31. Kapitel 4.6: 3, 5, 9, 17, 31. Kapitel 4.8: 1, 7, 13, 21. Kapitel 4.9: 1, 3, 13, 30. Kapitel 4.10: 1, 5, 9

SEMINARIEUPPGIFTER

Uppgift 1. Låt $f(x) = (2x+1)e^{-x}$.

A. Bestäm definitionsmängden till f.
B. I vilka punkter är f kontinuerlig?
C. På vilka intervall är f strängt växande respektive strängt avtagande?
D. Bestäm alla lokala extrempunkter till f.
E. Beräkna gränsvärdena $\lim_{x\to\infty} f(x)$ och $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
F. Skissa funktionsgrafen $y = f(x)$.

Uppgift 2. Låt $h(t) = t + \cos t$.

A. Bestäm alla kritiska punkter till h.
B. Bestäm alla lokala extrempunkter till h.
C. Avgör om h antar något största respektive minsta värde och ange de intervall där h är strängt växande respektive strängt avtagande.

Uppgift 3. Bestäm alla asymptoter till kurvan $y = \dfrac{2+x^2}{x}$.

Uppgift 4. Man konstruerar en cylindrisk burk med botten och lock. Den totala arean av burkens begränsningsyta är A. Hur ska man välja burkens höjd och bottenradie för att maximera burkens volym?

Uppgift 5. Låt $f(x) = xe^{-x^2/2}$. Bestäm de intervall där f är konvex (concave up) respektive konkav (concave down).

Uppgift 6. Låt $f(x) = e^x$.

A. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till f kring punkten $x = 0$.
B. Använd Taylorpolynomet ovan för att approximera $1/\sqrt{e}$, dvs $f(-1/2)$.
C. Avgör om felet i approximationen i uppgift B är mindre än $1/25$.

Uppgift 7. Låt $g(t) = \sqrt{t}$

A. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till g kring punkten $t = 25$.
B. Använd Taylorpolynomet ovan för att approximera $\sqrt{26}$.
C. Avgör om felet i approximationen i uppgift B är mindre än $1/1000$.

Uppgift 8. Betrakta ekvationen $x^5 + x - 1 = 0$

A. Visa med hjälp av derivata att ekvationen har högst en lösning.
B. Visa med hjälp av satsen om mellanliggande värden att ekvationen har minst en lösning som ligger mellan 0 och 1.
C. Finn en approximation av lösningen genom att välja ett lämpligt startvärde och göra två iterationer av Newton-Raphsons metod.

Uppgift 9. Beräkna följande gränsvärden.

A. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1+h}}{h}$

B. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{x^2}}{x^2}$

Uppgift 10. En sfärisk tank med radie 5 dm fylls med vatten i en takt av 3 liter per minut. Hur snabbt stiger vattenytan i tanken vid den tidpunkt då djupet är 2 dm? Tips: Vattenvolymen V beror på vattendjupet d enligt formeln

$$V = \pi \frac{15d^2 - d^3}{3}.$$

Uppgift 11. Avgör om funktionen f som ges av $f(x) = x \ln x$ antar något största respektive minsta värde när x varierar i intervallet $1 \leq x \leq 5$ och bestäm i så fall dessa.

Uppgift 12. Avgör om funktionen f som ges av $f(x) = x - \arcsin x$ antar något största respektive minsta värde och bestäm i så fall dessa.

Uppgift 13. Skissa, med hjälp av bl a en derivataundersökning, kurvan med ekvation $y = \ln\sqrt{1+x^2} - \arctan x$.

DISKUSSIONSUPPGIFTER

Här är några extra uppgifter att diskutera vid seminariet. Lösningar behöver inte skrivas ner i förväg.

- Avgör om $f(x) = |x-1| + \sqrt{x+1}$ antar något största respektive minsta värde när x varierar i intervallet $[-1, 2]$ och bestäm i så fall dessa.
- Ett flygplan flyger rakt med konstant hastighet 600 km/h och konstant höjd 5 km. Vid ett tillfälle passerar flygplanet rakt ovanför ett hus. Hur snabbt ändras avståndet mellan flygplanet och huset 1 minut senare?
- Visa att ekvationen $2\arctan x = 6 - 3x$ har exakt en lösning och att lösningen ligger i intervallet $[1, 2]$. Använd Newton-Raphsons metod för att approximera lösningen.
- Finns det någon funktion som har definitionsmängd $\mathbf{R}$ och som har ett globalt extremvärde i origo utan att derivatan i origo är noll? Ge exempel på en sådan funktion eller visa att ingen sådan funktion finns.
- Finns det någon funktion som har definitionsmängd $\mathbf{R}$ och som saknar ett globalt extremvärde i origo trots att derivatan i origo är noll? Ge exempel på en sådan funktion eller visa att ingen sådan funktion finns.
- Finns det någon funktion som har definitionsmängd $\mathbf{R}$ och som är strängt växande utan att derivatan är positiv överallt? Ge exempel på en sådan funktion eller visa att ingen sådan funktion finns.
- Finns det någon funktion som har definitionsmängd $\mathbf{R}$ och som inte är strängt växande, trots att derivatan är positiv överallt? Ge exempel på en sådan funktion eller visa att ingen sådan funktion finns.
- Bestäm värden på konstanterna a, b och c så att
$$|ae^{bx+cx^2} - 2x^2 - 4| \leq 10^{-4} \quad \text{då } |x| \leq 0.1.$$
- Visa att $x((\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 6\ln x) \geq 6(x-1)$ för alla $x > 0$.