KTH Matematik
Hans Thunberg
SF1661 Perspektiv på matematik

Workshop om decimalbråksrepresentation av reella tal

Denna workshop syftar till att du ska förstå vad det innebär att skriva ett reellt tal i form av ett decimaltal, med eventuellt oändlig decimalbråksutveckling. Du kommer också att studera hur decimalbråksutvecklingar för rationella tal och irrationella tal skiljer sig åt.

Förberedande uppgifter - lös dessa innan workshopen

1. Ändliga decimalbråksutvecklingar representerar rationella tal

Uppgift 1. Förklara varför ett reellt tal som kan skrivas med *ändligt* många decimaler alltid är ett rationellt tal. Illustrera genom att skriva följande tal på formen $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

(a) 512.43 (b) 0.3456 (c) 3.14 (d) -11.11

Observera också att den ändliga decimalutvecklingen anger talets position på tallinjen exakt. För att till exempel markera talet 1,34 behöver vi bara dela in sträckan mellan talen 1 och 2 i hundra lika stora delar, och sedan förflytta oss 34 sådana hundradelar till höger om 1.

Uppgift 2. Det finns som du säkert vet rationella tal som inte kan skrivas med ändligt många decimaler. Kanske kan du redan ett exempel på det?

Uppgift 3. Irrationella tal kan inte skrivas exakt med ändligt många decimaler, det följer av första uppgiften. Hur då? Förklara!

Vi kan sammanfatta det vi har kommit fram till så här långt på följande sätt.

- talet r har ändlig decimalbråksutveckling $\implies$ r är rationellt;
- det finns också rationella tal med oändlig decimalbråksutveckling;
- alla irrationella tal har oändlig decimalbråksutveckling.

Att fundera på: Är $0.999\ldots$ och $1.000\ldots$ två olika tal eller i själva verket ett och samma tal skrivet på två olika sätt?

Uppgifter att arbeta med under workshopen

2. Oändliga decimalbråksutvecklingar

Om alla reella tal ska kunna skrivas som decimalutvecklingar tycks vi behöva kunna använda oss av oändliga decimalbråksutvecklingar. Men vad ska vi mena det?

Betrakta decimalbråksutvecklingen $t = 0.222\dots$ där punkterna skall antyda att det i själva verket är en oändlig rad med tvåor. Ett sätt tolka detta är som följer.

- Från de två första decimalerna utläser vi att $0.2 \leq t \leq 0.3$, dvs t ligger i intervallet I_1 med ändpunkter 0.2 och 0.3.
- Från de tre första decimalerna utläser vi att $0.22 \leq t \leq 0.23$, dvs t ligger intervallet I_2 med ändpunkter 0.22 och 0.23.

Observera intervallet I_2 ligger inuti intervallet I_1.

Uppgift 4. Fortsätt denna process i ytterligare två steg, dvs ange intervall I_3 och I_4 med rationella ändpunkter som innehåller t och som är sådana I_4 ligger i I_3 som i sin tur ligger i I_2. Rita också en bild som illustrerar detta.

Genom att fortsätta denna process kan vi med hjälp av rationella tal precisera var på talaxeln t ligger med så stor noggrannhet vi önskar.

Uppgift 5. Övertyga nu dig själv om att vi kan göra denna tolkning av *varje* oändlig decimalbråksutveckling. Exemplifiera genom att ange en följd av fem krympande intervall med rationella ändpunkter som succesivt ger alltmer precis information om var talet π ligger.

Uppgift 6. Talet $\sqrt{5}$ är ett irrationellt tal, det kan man visa med samma typ av bevis som visar att $\sqrt{2}$ är irrationellt. Vi ska nu bestämma början av decimalbråksutvecklingen av $\sqrt{5}$. Först konstaterar vi att $2 \leq \sqrt{5} \leq 3$ eftersom $4 \leq 5 \leq 9$.

- Visa nu att $2.2 \leq \sqrt{5} \leq 2.3$.
- Bestäm genom prövning först ett intervall av längd 1/100 som innehåller $\sqrt{5}$, och sedan ett av längd 1/1000 och slutligen ett av längd 1/10000. Intervallen ska ha rationella ändpunkter, och varje intervall ska vara innehållet i de tidigare.
  Använd din räknare för beräkningarna (men använd inte $\sqrt{}$-knappen!).
- Ange ett närmevärde till $\sqrt{5}$.

Genom att forsätta processen kan vi bestämma $\sqrt{5}$ med önskad noggrannhet.

Kommentar. En matematiskt precis definition av vad ett icke-rationellt reellt tal är, kan göras genom att *definiera* icke-rationella tal som följder av krympande interval med rationella ändpunkter, där varje interval skall vara inneslutet i de tidigare. I denna konstruktion är det väsentligt att man använder *slutna* interval, dvs interval som innehåller sina ändpunkter. Man måste också beakta att det finns många olika följder av interval som leder fram till ett och samma tal, vilket man kan förstå till exempel genom att upprepa de konstruktioner vi har använt ovan men använda någon annan bas än bas tio.

3. Rationella tal är precis de tal som har ändlig eller periodisk decimalutveckling

Med *periodisk* utveckling menar vi att decimalutvecklingen efter ett tag består av en upprepning av en viss följd av decimaler, som t ex $0.333\dots$, $1.023777\dots$ (där vi tänker oss att resten av utvecklingen består av sjuor) eller $0.0236236236\dots$ (där sekvensen 236 upprepas i det oändliga).
Vi kan betrakta ändliga utvecklingar som periodiska genom att fylla på med en oändlig rad av nollor, t ex $0.57 = 0.57000\dots$.

Ni ska nu bevisa att

> *rationella tal är precis de tal som har ändlig eller periodisk decimalutveckling.*

Av detta följer omedelbart också att

> *irrationella tal är precis de tal som har oändlig icke-periodisk decimalutveckling.*

Observera hur logiken fungerar här. Låt R vara påståendet "talet r är rationellt" och låter P vara påståndet "talet r har ändlig eller periodsik decimalbråksutveckling".

- Det första påståendet kan då formuleras
$$P \iff R,$$
och det andra påståendet, som kan skrivas
$$\neg P \iff \neg R,$$
är logiskt ekvivalent med det första påståndet, så det räcker att bevisa det första påståendet
- För att bevisa det första påståndet $P \iff R$ bevisar vi de två implikationerna $P \implies R$ och $R \implies P$.

Uppgift 7. Visa först att varje rationellt tal har en periodisk decimalbråksutveckling ($R \implies P$):

- Bestäm decimalbråksutvecklingen av några rationella tal, t ex $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$ och $\frac{4}{7}$ genom utföra divisionerna för hand tills du ser mönstret i decimalutvecklingen. Förklara varför du kan vara säker på att mönstret kommer att upprepa sig.

  Be din lärare om hjälp om du har svårt att genomföra divisionerna för hand på ett bra sätt. Enklast är att ställa upp divisionen i "trappan".
- Förklara, utifrån de exempel du just genomfört, varför varje rationellt tal kommer att ha en periodisk decimalbråksutveckling.

Nästa steg blir att bevisa det omvända påståendet, dvs att varje periodisk decimalbråksutveckling representerar ett rationellt tal ($P \implies R$) Börja med att studera talet $r = 0.777\ldots$. Om vi multiplicerar talet r med 10 får vi talet $10r = 7.777\ldots$ och bildar vi sedan differensen $10r - r$ ser man att

$$10r - r = 7.777\ldots - 0.777\ldots \iff 9r = 7.000\ldots \iff r = \frac{7}{9},$$

så speciellt är r ett rationellt tal.

Uppgift 8.

- Genomför samma typ av resonemang för talet $s = 1.343434\ldots$ genom att bilda differensen $100s - s$. (Varför använder vi faktorn 100 denna gång?)
- Förklara varför denna typ av resonemang kan genomföras för varje periodisk decimalbråksutveckling. Kan du formulera detta generellt på ett precist matematiskt språk?

4. Kan ett tal ha två olika decimalbråksutvecklingar?

Uppgift 9. Avgör om $0.999\ldots$ och $1.000\ldots$ är två olika tal eller i själva verket ett och samma tal skrivet på två olika sätt.

Kan du generalisera detta till andra par av decimalbråksutvecklingar?

5. Ett annat sätt att se att periodiska utvecklingar representerar rationella tal

(Detta avsnitt förutsätter att du är bekant med begreppet *konvergent geometrisk serie*, och att du vet att summan av en sådan serie ges av

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}, \quad \text{om } |q| < 1.$$

Återvänd till detta avsnitt efter Föreläsning 7 om du inte är bekant med dessa begrepp.)

Låt oss åter ta talet $0.222\ldots$ som exempel.

Att decimalbråksutveckla ett tal är att uttrycka det i postionssystemet med bas tio, så per defintion gäller att

$$0.222\cdots = \frac{2}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{10}\right)^k.$$

Vi känner igen högerledet som en geometisk serie med första term $\dfrac{2}{10}$ och kvot $\dfrac{1}{10}$, vars summa vi kan beräkna till

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{2}{10}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{9}.$$

Så vi ser även på detta sätt att den periodiska decimalautvecklingen $0.222\ldots$ representerar ett rationellt tal.

Uppgift 10. Genomför samma typ av resonemang för talen $0.333\ldots$ och $0.151515\ldots$.

I *What is Mathematics?* på sidan 67 formuleras i generella termer hur man på detta vis bevisar att varje periodiskt decimalbråk representerar ett rationellt tal.