KTH Matematik
Hans Thunberg
SF1661 Perspektiv på matematik

Workshop om avståndsformeln och cirkelns ekvation.

Förberedande uppgifter - lös dessa innan workshopen

I denna workshop kommer ni att undersöka några viktiga begrepp inom den analytiska geometrin, dvs den gren av geometrin där man använder sig av koordinatsystem för att beskriva geometriska objekt och bestämma deras egenskaper. Eftersom koordinaterna beskriver objekten med hjälp av *tal*, kan man med lämpliga *beräkningar* bestämma olika egenskaper hos objekten. Den idé går tillbaka till René Descartes (Renatus Cartesisus), 1596 - 1650.

Det är viktigt att rita figurer som tydliggör beteckningar och resonemang, tänk på det när du löser uppgifterna nedan.

1. Avstånd i planet

Uppgift 1. Använd Pytagoras Sats för att beräkna avståndet mellan de två punkter i planet som har koordinater $(-1, 1)$ respektive $(2, 6)$.

Uppgift 2. Avståndsformeln i planet. Härled, med hjälp av Pytagoras Sats, ett uttryck för avståndet mellan två punkter i planet med koordinater (x_1, y_1) respektive (x_2, y_2).

Uppgift 3. Beräkna längden av sidorna i triangeln vars hörn har koordinater $(1, 2)$, $(3, -1)$ respektive $(-2, 1)$ genom att använda den avståndsformel du härledde i förra uppgiften.

2. Cirkelns ekvation.

Definition. En cirkel i planet med medelpunkt (a, b) och radie $r > 0$ definieras som mängden av alla punkter (x, y) som befinner sig på avstånd r ifrån medelpunkten (a, b).

Uppgift 4. Övertyga dig om att denna defintion av en cirkel motssvarar det du intuitivt vill kalla en cirkel.

Definitionen är alltså ett villkor som bestämmer vilka punkter (x, y) som ska höra till cirkeln. Detta villkor kan också skrivas som en ekvation i (x, y); cirkeln består av precis de punkter vars koordinater (x, y) uppfyller ekvationen.

Uppgift 5. Härled, med hjälp av avståndsformeln, ekvationen för en cirkel med radie r och medelpunkt (a, b).

Uppgifter att arbeta med under workshopen

Börja med att diskutera och jämföra era lösningar på de förberedande uppgifterna. Ser ni hur Pytagoras Sats, avståndsformeln och cirkelns ekvation hänger ihop med varandra?

Uppgift 6. a) Ange ekvationen för den cirkel C som har radie 11 och medelpunkt i $(10, -2)$.

b) Avgör om origo ligger inuti, på eller utanför cirkeln C.

c) Ange en olikhet som är uppfylld precis av de punkter som
- ligger strikt inuti (dvs inuti i men inte på) cirkeln C;
- inuti eller på cirkeln C ;
- strikt utanför cirkeln C.

Exempel. Ekvationen

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 6$$

beskriver en cirkel med medelpunkt $(1, -2)$ och radie $\sqrt{6}$. Genom att utveckla vänster led och sedan förenkla kan denna ekvation också skrivas

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 1.$$

Om vi istället är givna den senare ekvationen, och vill förstå hur dess lösningsmängd ser ut kan vi genom att kvadratkomplettera försöka ta oss till standardformen $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$,

$$\begin{gathered}
x^2 - 2x + y^2 + 4y = 1 \iff \\
(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 1 + 1 + 4 \iff \\
(x-1)^2 + (y+2)^2 = 6,
\end{gathered}$$

och på så sätt se att det lösningsmängden faktiskt är en cirkel och avläsa medelpunkten till $(1, -2)$ och radien till $\sqrt{6}$.

Uppgift 7. Skissera och beskriv med ord lösningsmängden till
a) ekvationen $x^2 + 6x + y^2 - 8y = 11$
b) ekvationen $2x^2 + 12x + 2y^2 - 16y = 22$
c) olikheten $-9 < x^2 + 6x + y^2 - 8y < 11$
d) olikheten $-9 \leq x^2 + 6x + y^2 - 8y \leq 11$
e) ekvationen $x^2 - 2x + y^2 = -1$
f) olikheten $x^2 - 2x + y^2 < -1$

3. Avstånd på linjen

Om x_1 och x_2 är två punkter på x-axeln ges som bekant avståndet d dem emellan av $d = |x_1 - x_2|$.
Men vi kan också tänka på punkterna på x-axeln som en del av xy-planet, de två punkterna ovan har då koordinater $(x_1, 0)$ respektive $(x_2, 0)$

Uppgift 8. Använd avståndsformeln i planet för att få ett uttryck för avståndet mellan punkterna x_1 och x_2 på x-axeln.

Uppgift 9. Du har nu två uttryck för avståndet mellan två punkter på x-axeln. Dessa två uttryck måste rimligen vara lika.Visa det direkt, utan att hänvisa till avståndstolkningen, genom att visa att

$$\sqrt{t^2} = |t|\,, \quad \text{för alla reella tal } t.$$

4. Avstånd i rummet

Uppgift 10. Om vi inför ett rätvikligt koordinatsystem i i det tredimensionella rummet, med samma längdskala på alla tre axlarna, kommer avståndet d mellan två punkter (x_1, y_1, z_1) och (x_2, y_2, z_2) att ges av

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Bevisa detta!

Uppgift 11. Beskriv med ord de geometriska objekt som definieras av
a) ekvationen $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 9$;
b) olikheten $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 \leq 9$

5. Ellipser och hyperblar

I Uppgift 8 härledde du ekvationen för en cirkel i planet med given radie och medelpunkt. Vi ska nu avsluta denna workshop med att studera några andra liknande ekvationer.

Uppgift 12. Undersök vilka geometriska objekt som definieras av följande ekvationer och olikheter (det vill säga beskriv mängden av de talpar (x, y) som uppfyller respektive villkor). Använd gärna en grafritande räknare eller motsvarande.

a) $x^2 + 4y^2 = 16$ b) $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$ c) $\dfrac{(x-3)^2}{4^2} + \dfrac{(y+1)^2}{2^2} = 1$

d) $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{2^2} \leq 1$ e) $x^2 - y^2 = 1$ f) $\dfrac{y^2}{2^2} - x^2 = 4.$

Läs nu i avsnittet *Equations of lines and curves* på sidorna 74 - 75 i *What is mathematics?*. Vad kallas de kurvor du studerade i uppgift 12?

Uppgift 13. Skissera och beskriv med ord lösningsmängden till ekvationerna
a) $4x^2 + 9y^2 = 36$
b) $4x^2 - 9y^2 = 36$
c) $-4x^2 - 9y^2 = 36$
d) $-4x^2 + 9y^2 = 36$

Uppgift 14. Beskriv och skissera de punkter i planet som uppfyller följande olikheter
a) $x^2 + 2y^2 < 3$
b) $x^2 + 2y^2 \leq 3$
c) $x^2 + 2y^2 > 3$