KTH Matematik
Hans Thunberg

SF1661 Perspektiv på matematik

Kort om exponentialfunktioner och potensfunktioner

För varje reellt tal $a > 0$ kan vi definiera *exponentialfunktion* $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom

$$f_a(x) = a^x.$$

Eftersom $a^x > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$, och eftersom a^x kan anta godtyckligt stora värden, är värdemängden $V_{f_a} = (0, \infty)$. Talet a kallas exponentialfunktionens bas. En speciell roll spelas av den exponetialfunktion som fås när $a = e = 2,718281828459045\ldots$ (ett irrationellt tal). Det finns många ekvivalenta sätt att definera talet e, en beskrivning är att det är det tal som gör att grafen $y = e^x$ har en tangent med riktingskoefficient $= 1$ i skärningen med y-axeln.

Uppgift 1. Skissera för hand i samma koordinatsystem funktionsgraferna $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = 2^x$ och $y = 4^x$.

- Hur förhåller sig de tre kurvorna till varandra? Var skär de varandra? Vilka kurvor ”ligger överst”, ”i mitten” och ”underst” på olika interval?
- Förklara varför $y = (\frac{1}{2})^x$ och $y = 2^x$ är varandras spegelbilder i y-axeln.
- Hur måste värdet på x ändras för att värdet på 2^x ska fördubblas respektive halveras?
- Hur måste värdet på x ändras för att värdet på 4^x ska fördubblas respektive halveras?

Exponentialfunktioner studerar man under gymnasiekurserna, och begrepp som ”exponentiell tillväxt” är vanligt förekommande i olika tillämpningar, så exponentialfunktioner är i den mening ett välkänt begrepp som vi kanske tar för självklart. Men vad menar vi egentligen med uttrycket a^x? Hur beräknar man värdet av a^x när x är ett reellt tal?

Om x är ett positivt heltal ger själva definitionen av potenser att $a^x = a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$ (x stycken faktorer). Som vi diskuterat tidigare i kursen kan man ur denna definition lät visa de tre potenslagarna gällande för positiva heltalsexponenter. Genom att tänka sig att dessa potenslagar ska gälla även för alla övriga rationella tal (inklusive alla heltal) finner vi lämpliga definitioner av a^x när x är rationellt. Men sen blir det knepigare.

Hur ska vi exempelvis definiera $3^{\sqrt{2}}$? Eller $(-2)^\pi$? Det finns olika sätt att tänka på detta.

I. Det intuitvt kanske enklaste är att tänka sig att vi ritar alla punkter på grafen a^x för rationella värden av x, dessa kan vi i princip beräkna. De ”hål” som lämnas av de irrationella talen fyller vi igen genom att göra grafen mjuk och fin. Med andra ord så definierar vi till exempel $3^{\sqrt{2}}$ som det gränsvärde vi får när vi tar med fler och fler decimaler i decimalutvecklingen av $\sqrt{2} = 1.414\ldots$,

$$3^1, 3^{1.4} = 3^{14/10}, 3^{1.41} = 3^{141/100}, 3^{1.414} = 3^{1414/1000} \to 3^{\sqrt{2}}.$$

Den funktion $f(x) = a^x$ vi får visar sig vara monotont strikt växande $\implies$ f är bijektiv $\implies$ f är inverterbar. Inversfunktionen kallar vi $f^{-1}(x) = \log_a x$. Inversen till e^x är den naturliga logaritmen $\ln x$.

II En alternativ väg skisseras i *What is Mathematics*, sidorna 442 – 447, en väg som är lättare att göra logiskt vattentät och som också bättre återspegalr den historiska utvecklingen av begreppen. Här definieras istället först $\ln x$ som arean under kurvan $y = 1/t$ mellan 1 och x, varpå man visar att denna funktion har precis de egenskaper som logaritmer ”ska ha”, att den är montont växande och därmed inverterbar, och slutligen definieras e^x som dess invers.

Till sist, det är viktigt att skilja på exponentialfunktioner $f(x) = a^x$, som har x i exponenten, och potensfunktioner, funktioner av typ $g(x) = x^a$ som har x i basen.

Uppgift 2. Som en övning på den senare typen av funktioner, skissera graferna till följande funktioner.

a) $y = x^{1/2}$ b) $y = (x+1)^{1/2}$ c) $y = x^{1/3}$ d) $y = x^3$ e) $y = (x-2)^{-1}$