Hans Thunberg
KTH Matematik
SF1661 Perspektiv på Matematik HT14

Workshop om funktioner, ekvationer och deras grafer

Förberedande uppgifter - lös dessa innan workshopen

Uppgift 1. På sidorna 272 - 289 i *What is mathematics?* ges ett antal exempel på funktioner som har andra definitions- eller värdemängder än interval på reella axeln. Redogör för tre av dessa exempel, och ange tydligt definitionsmängd, målmängd och värdemängd, samt om funktionerna är injektiva, surjektiva respektiva bijektiva.

Uppgift 2. Visa att funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+3$ är inverterbar och bestäm dess invers. Ange också inversens definitionsmängd.

Uppgift 3. a) För vilka positiva heltal n är funktionen $f(x) = x^n$ inverterbar på hela $\mathbb{R}$? Vilken är då dess invers?
b) För vilka reella tal r är funktionen $f(x) = x^r$ inverterbar på intervallet $(0, \infty)$ (dvs $0 < x < \infty$)? Vilken är då dess invers? Ge exempel!

Uppgifter att arbeta med under workshopen

Uppgift 4. Visa att en linjär funktion $f(x) = kx+m$ är inverterbar om och endast om $k \neq 0$. Bestäm också ett uttryck för inversfunktionen f^{-1}. Verifiera att $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ och att $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

Uppgift 5. a) Visa att ekvationen $\sqrt[3]{x-2} = c$ har precis en lösning för varje värde på högerledet c. Vi kan också formulera det som att grafen $y = \sqrt[3]{x-2}$ skär varje linje $y = c$ i precis en punkt. Rita figur!

b) Förklara varför resultatet i a) medför att $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är inverterbar.

c) Bestäm ett uttryck för inversen till f^{-1}. Ange också definitionsmängd och värdemängd till f^{-1}. Kontrollera vidare att $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ för alla $x \in D_{f^{-1}}$ och att $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ för alla $x \in D_f$.

Uppgift 6. Bevisa att funktionen $f(x) = x + e^x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, är inverterbar.

Däremot kan vi inte lösa ut x ur uttrycket ekvationen $y = x + e^x$ med hjälp av de fyra räknesätten och elementära funktioner, så vi kan inte på det sättet få någon formel för $f^{-1}(x)$. Vi vet att inversen f^{-1} existerar, men vårt vanliga matematikspråk räcker inte till för att beskriva den som ett funktionsuttryck.

Uppgift 7. Även fast vi inte har någon formel för funktionen f^{-1} i Uppgift 6, kan vi bestämma vissa funktionsvärden, till exempel $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(e+1)$ och $f^{-1}(\frac{1}{e}-1)$. Gör det!

Uppgift 8. Ekvationen $\sin x = c$ har antingen oändligt många lösningar (om $|c| \leq 1$) eller inga lösningar alls (om $|c| > 1$). (Rita figur!)
Ange det största intervall I som innehåller origo och som är sådant att funktionen $f(x) = \sin x$ är inverterbar på definitionsmängden I. Vad blir då inversens definitionsmängd? (Denna funktion f^{-1} som du nu hardefinieratl kallas arcussinus x och betecknas $\arcsin x$ eller $\sin^{-1} x$.)

Funktioner, ekvationer och grafer

Begreppen 'grafen till en funktion' och 'grafen till en ekvation' är besläktade med varandra, men de betyder inte samma sak.

Grafen till en funktion $f(x)$ består av alla talpar $(a, f(a))$, där a tillhör f:s definitionsmängd. Till exempel utgörs grafen till funktionen $f(x) = x^2$ av den parabel som består av alla punkter med koordinater på formen (a, a^2), $a \in \mathbb{R}$.

Grafen till en ekvation $F(x, y) = 0$ med två obekanta definieras som mängden av alla talpar (x, y) för vilka ekvationen är uppfylld. Grafen till en ekvation är alltså detsamma som ekvationens lösningsmängd. Till exempel består grafen till ekvationen $x^2 + y^2 = 1$ av alla punkter (x, y) i talplanet sådana att $x^2 + y^2 = 1$.

Kommentar. Definitionerna ovan gäller även om variablerna inte är reella tal. Till exempel består grafen till ekvationen $z^2 + w^2 = 1$, där z och w tillåts vara komplexa tal, av mängden av par av komplexa tal (z, w) som uppfyller ekvationen. Denna graf kan vi inte visualisera som vi är vana vid, grafen är en samling punkter i ett rum med fyra dimensioner.

Uppgift 9. a) Skissera grafen till funktionen $f(x) = 2x - 1$. Denna graf är naturligtvis identisk med grafen till ekvationen $2x - y - 1 = 0$.

b) Skissera grafen till funktionen $f(x) = x^2$. Ange också en ekvation som har samma graf som funktionen f.

c) Är det sant att varje funktionsgraf också kan ses som grafen till en ekvation?

d) Skissera grafen till ekvationen $x^2 + y^2 = 4$.

e) Är det sant att varje ekvationsgraf också kan ses som en funktionsgraf?

Observera att man glider i betydelse mellan *grafen till en ekvation* och *grafen till en funktion*, skrivsättet $y = f(x)$ är ett exempel på detta. Av övningsuppgifterna ovan framgår att det ofta är naturligt att göra så, men också att det i andra sammanhang är viktigt att skilja på dessa två begrepp.

Inversfunktioners grafer

Om f är en inverterbar funktion (med defintionsmängd och värdemängd som bägge är delmängder till de reella talen), finns det ett enkelt samband mellan funktionens graf $y = f(x)$ och inversfunktionens graf $y = f^{-1}(x)$.
Eftersom inversfunktionen f^{-1} definieras av att

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

är det klart de två graferna $y = f(x)$ och $x = f^{-1}(y)$ är identiska.
Om vi nu istället vill se grafen $y = f^{-1}(x)$ skall vi låta x och y byta roller, vilket är det samma som att spegla grafen i linjen $y = x$. Alltså:

> *Grafen till $y = f^{-1}(x)$ fås genom att spegla grafen $y = f(x)$ i linjen $y = x$.*

Uppgift 10. Exemplifiera detta påstående genom att i samma koordinatsystem rita graferna till $f(x) = x^2$, $D_f = [0, \infty]$ och dess invers $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Uppgift 11. Gör en skiss av grafen till funktionen $f(x) = x + e^x$ genom att betrakta funktionen som en summa av två uttryck. Skissera sedan i samma figur också grafen till $y = f^{-1}(x)$.

Uppgift 12. Skissera grafen $y = \arcsin x$ (se Uppgift 8) .

Implikation eller ekvivalens vid ekvationslösning

När vi vill lösa en ekvation gör vi ofta ett antal omskrivningar av ekvationen genom att tillämpa samma operation på högerled och vänsterled (addera samma sak till bägge led, kvadrera bägge led etc). Vi skriver om ekvationen till en ny ekvation genom att applicera en viss funktion på bägge led. Symboliskt kan vi skriva det som att ekvationen

$$p(x) = q(x) \qquad \text{(Ekvation 1)}$$

omformas genom att applicera en funktion F till bägge led, vilket leder till en ny ekvation

$$F\left(p(x)\right) = F\left(q(x)\right) \qquad \text{(Ekvation 2)}$$

Uppgift 13. Förklara varför man inte kan förlora några lösningar genom att applicera en och samma funktion till bägge led.

Vad händer när F är en inverterbar funktion?

Uppgift 14. Visa att Ekvation 1 och Ekvation 2 har samma lösningar om funktionen F är inverterbar.
I så fall kan vi skriva

$$p(x) = q(x) \iff F\left(p(x)\right) = F\left(q(x)\right).$$

där ekvivalenspilen($\iff$) uttrycker att påståendet $p(x) = q(x)$ är sant om och endast om påståendet $F\left(p(x)\right) = F\left(q(x)\right)$ är sant, dvs att de två ekvationerna har samma lösningar.

Uppgift 15. Ge exempel på ekvation där lösningsproceduren bara innehåller omskrivningar av ekvationenens bägge led med inverterbara funktioner.

Vad händer när F inte är en inverterbar funktion?

Om funktionen F inte är inverterbar kan det tillkomma lösningar, s k falska lösningar, när vi applicerar F till bägge led, vilket framgår av följande uppgift.

Uppgift 16. Vid lösning av ekvationen $\sqrt{x+2} = x$ börjar vi med att kvadrera bägge led, dvs vi applicerar den icke inverterbara funktionen $F(t) = t^2$ på bägge led. Visa att det tillkommer en falsk lösning vid kvadreringen.

Om F inte är inverterbar måste vi alltså skriva

$$p(x) = q(x) \implies F\left(p(x)\right) = F\left(q(x)\right) \quad (\text{t ex } \sqrt{x+2} = x \implies x+2 = x^2\ )$$

med implikationspil ($\implies$), som säger att om påståendet $p(x) = q(x)$ är sant så är också påståendet $F\left(p(x)\right) = F\left(q(x)\right)$ sant, dvs att varje x som löser den första ekvationen också löser den andra ekvationen, men att omvändningen inte säkert är sann, det kan finns lösningar till den andra ekvationen som inte löser den första. Följaktligen är det logiskt nödvändigt att avsluta med prövning för att se vilka av lösningarna som också löser den första ekvationen.