KTH Matematik, Hans Thunberg
SF1661 Perspektiv på matematik

Workshop om derivata och integral

(1) a) Vad kan man säga om funktionen $f(x)$ och dess graf $y = f(x)$ om derivatan $f'(x) > 0$, respektive om $f'(x) < 0$, för alla x i ett visst intervall?

b) Vad kan man säga ifall andraderivatan $f''(x)$ (dvs derivatans derivata) är positiv i ett intervall? Om den den är negativ? Hur ser grafen ut i den punkt där andraderivatan byter tecken? En sådan punkt kallas en *inflektionspunkt* till f.

c) Exemplifiera med några funktioner t ex $f(x) = x^2$ och $g(x) = x^3$.

(2) I denna uppgift ska du undersöka hur en funktion f:s derivata i en viss punkt x_0 kan användas till att approximera funktionsvärdena till f nära punkten x_0, så kallad *linjär approximation*. Tanken är att grafen $y = f(x)$ i närheten av en given punkt $(x_0, f(x_0))$, kan approximeras med tangentlinjen till grafen i denna punkt. Vi tar funktionen $f(x) = x^2$ som exempel, och väljer att approximera denna kring punkten $x_0 = 1$.

a) Bestäm tangentlinjen till funktionen $f(x) = x^2$ i punkten $(1, 1)$. För att förstå linjär approximation är det bäst att skrivq tantgentlinjen på formen

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{(där } x_0 = 1 \text{ i detta fall).}$$

Tänk efter så att du förstår att den ekvation du får verkligen är ekvationen för en rät linje.

b) Rita i samma figur tangentlinjen $y = L(x)$, där $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ och $x_0 = 1$, och funktionsgrafen $y = f(x)$ i ett intervall kring punkten $x = 1$, t ex över intervallet $0 \leq x \leq 2$.

c) Övertyga dig själv, genom att studera figuren, om att den linjära funktione $L(x)$ approximerar $f(x)$ väl när x är väldigt nära x_0, det vill säga nära $|x - x_0|$ är litet.

d) Apprixmationen kan skrivas

$$f(x) \approx L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

giltig när $|\Delta x| = |x - x_0|$ är litet.
Härled denna approximationsformel från derivatans definition.

d) Beräkna med hjälp av den linjära approximationen approximativa värden på $(0.98)^2$ och $(1.01)^2$.

KOMMENTAR: Formeln för linjär approximation kan också skrivas på den mer kortfattade formen

$$\Delta f \approx \frac{df}{dx}\Delta x,$$

där $\Delta f = f(x) - f(x_0)$, $\dfrac{df}{dx} = f'(x_0)$ och $\Delta x = (x - x_0)$.

(3) Bestäm ett approximativt värde till $\sqrt[3]{7.9}$ genom linjär approximation av funktionen $f(x) = \sqrt[3]{x}$ kring lämplig punkt .

(4) a) Beräkna ett approximativt värde till integralen

$$\int_0^{20} 2^{x/10} - 2\,dx$$

genom att approximera med en lämpig ändlig Riemannsumma.

b) Beräkna på motvarande sätt ett approximativt värde på arean av det område som begränsas av x-axeln, kurvan $y = 2^{x/10} - 2$ samt de bägge linerna $x = 0$ och $x = 20$.

(5) En cylinder är 10 dm hög och har ett cirkulärt tvärsnitt med radien 2 dm. Densiteten ρ hos cylindern varierar med höjden enligt formeln $\rho(h) = 240 - 2h^2$ [g/dm^3]. Härled en integralformel för cylinderns massa och beräkna massan.

(6) a) Vilket är det minsta positiva tal x som är sådant att

$$\int_0^{x} \sin t\,dt = 0 \quad ?$$

Lös uppgiften utan att beräkna integralen.

b) Låt $H(x)$ vara den funktion som ges av

$$H(x) = \int_0^{x} \sin t\,dt.$$

Skissera i grova drag grafen $y = H(x)$ utan att beräkna integralen. Var har H sina lokala extrempunkter? Hur hänger de ihop med nollställena till integranden? Ange också $H'(x)$.

c) Kontrollera nu dina resultat i a) och b) genom att på vanligt sätt beräkna integralen med hjälp av integrandes primitva funktion så att du får $H(x)$ uttryckt som en elementär funktion.

(7) På sidan 438 i **WIM** förs en matematikdidaktisk diskussion om hur integralbegreppet ibland introduceras. Hur introducerades begreppet när du läste om det i gymnasiet? Vilka för- och nackdelar ser du mer att introduecera begreppet 'obestämd integral' innan den bestämda integralen introduceras?

Extrauppgift 1. Under vissa förhållanden gäller att ljudets utbredningshastighet v [m/s] i luft beror på temperaturen T [K] enligt formeln

$$v = v_0\sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

där v_0 är utbredningshastigheten vid en referenstemperatur T_0.
Man vill beräkna utbredningshastigheten v med hjälp av denna formel och mäter upp lufttemperaturen 300° K . Uppskatta det relativa felet i utbredningshastighet som uppstår om temperaturmätningen har ett absolut mätfel om 3° K.
Kommentar. Om den uppmätta temepraturen är T_u och den sanna temperaturen är T_s ges det relativa felet i v av

$$\frac{|v(T_s) - v(T_u)|}{|v(T_u)|}.$$

Täljaren $|v(T_s) - v(T_u)|$ kallas det absoluta felet i v.

Extrauppgift 2.: Summan $\sum_{k=1}^{100} k^4$ kan tolkas som en summa av areor hos 100 rektanglar med basen 1 och och höjder 1^4, 2^4, ..., 100^4 .
Visa med lämplig figur att

$$\int_0^{100} x^4\,dx < \sum_{k=1}^{100} k^4 < \int_0^{100} (x+1)^4\,dx$$

och visa sedan genom att beräkna integralerna och göra lämplig uppskattningar att att summans värde uppfyller

$$2 \cdot 10^9 < \sum_{k=1}^{100} k^4 < 3 \cdot 10^9.$$

Sensmoral: Knepiga summor kan ibland approximeras med enkla integraler.

Svar till vissa uppgifter:

(2) Tangentlinjen ges av $y = 1 + 2(x-1) \iff y = 2x - 1$. Linjär approximation kring $x_0 = 1$ ger $0.98^2 \approx 0.96$ och $1.01^2 = 1.02$.

(3) $\sqrt[3]{7.9} \approx \dfrac{239}{120} \approx 1.992$ (Extra uppgift 1) 1/200