Institutionen för matematik

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Torsdagen den 20 augusti 2015

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

1. Betrakta funktionen f som är definierad i området där $x + y^2 \neq 0$ genom
$$f(x, y, z) = \frac{x^2 z}{x + y^2}.$$
   (a) Beräkna gradienten $\nabla f(x, y, z)$. **(1 p)**
   (b) Bestäm riktningsderivatan av f i punkten $(2, 1, 1)$ i riktning mot punkten $(4, -1, 2)$. **(2 p)**
   (c) I vilken riktning växer f snabbast i punkten $(2, 1, 1)$? **(1 p)**

2. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}$ som ges av
$$\mathbf{F}(x, y) = \left(x + \frac{y}{2} + 3, \frac{x}{2} + y + 5\right)$$
för (x, y) i $\mathbb{R}^2$.
   (a) Vad innebär det att ett vektorfält är *konservativt*? **(1 p)**
   (b) Visa att vektorfältet $\mathbf{F}$ är konservativt. **(1 p)**
   (c) Använd vetskapen att vektorfältet är konservativt för att beräkna kurvintegralen
$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \left(x + \frac{y}{2} + 3\right)\, dx + \left(\frac{x}{2} + y + 5\right)\, dy$$
   där γ är någon slät kurva som börjar i $(-2, 0)$ och slutar i $(-2, -4)$. **(2 p)**

3. Betrakta den homogena kropp K som ges av olikheterna
$$x^2 + y^2 \leq z \leq 1.$$
För att bestämma masscentrum för K behöver man bland annat beräkna integralen
$$I_z = \iiint_K z\, dxdydz.$$
   (a) Hur beräknas masscentrum för K? **(1 p)**
   (b) Beräkna integralen I_z. **(3 p)**

DEL B

4. Beräkna största och minsta värdet av funktionen $f(x, y) = x^2y$ på området som ges av olikheten $3x^2 + 2y^2 \leq 6$. **(4 p)**

5. De differentierbara funktionerna $f(x, y)$ och $g(r, \theta)$ är relaterade genom
$$g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$
Vi vet att
$$\frac{\partial g}{\partial r}\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{och} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = 9.$$
Använd kedjeregeln för att beräkna
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, \sqrt{3}) \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1, \sqrt{3}).$$
(Det är användbart att känna till att $\cos(\pi/3) = 1/2$ och $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.) **(4 p)**

6. Betrakta flödet av vektorfältet $\mathbf{v}$
$$\mathbf{v}(x, y, z) = (x + y, y, 2xy + z + 3)$$
upp genom den del av ytan $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför xy-planet.
   (a) Parametrisera ytan. **(1 p)**
   (b) Ställ upp integralen som beräknar flödet av $\mathbf{v}$ med hjälp av parametriseringen från del (6a). **(2 p)**
   (c) Beräkna flödet av $\mathbf{v}$ med hjälp av integralen från del (6b). **(1 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Låt funktionen $f(x, y)$ vara definierad för $(x, y) \neq (0, 0)$ genom
$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}.$$
Visa att f blir kontinuerlig i origo om vi definierar $f(0, 0) = 0$. **(4 p)**

8. Bestäm den enkla, slutna, kontinuerligt deriverbara kurva C för vilken kraftfältet
$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2y + y^3 - 12y, 24x - x^3 - 6xy^2)$$
uträttar det största arbetet, då en partikel förflyttas ett varv moturs längs C. Ange också detta största arbete. **(4 p)**

9. Bestäm volymen av den kropp som ligger i området $z \geq 0$ och vars tvärsnitt med plan parallella med xz-planet är liksidiga trianglar med två hörn på enhetscirkeln i xy-planet. **(4 p)**