



**SF1626 Flervariabelanalys**  
**Lösningsförslag till tentamen 2015-08-20**

DEL A

1. Betrakta funktionen  $f$  som är definierad i området där  $x + y^2 \neq 0$  genom

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 z}{x + y^2}.$$

- (a) Beräkna gradienten  $\nabla f(x, y, z)$ . **(1 p)**  
(b) Bestäm riktningderivatan av  $f$  i punkten  $(2, 1, 1)$  i riktning mot punkten  $(4, -1, 2)$ . **(2 p)**  
(c) I vilken riktning växer  $f$  snabbast i punkten  $(2, 1, 1)$ ? **(1 p)**

**Lösningsförslag.**

(a) Vi beräknar de partiella derivatorna

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xz(x + y^2) - x^2z \cdot 1}{(x + y^2)^2} = \frac{x^2z + 2xy^2z}{(x + y^2)^2} = xz \frac{x + 2y^2}{(x + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y \cdot x^2z}{(x + y^2)^2} = -\frac{2x^2yz}{(x + y^2)^2}$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x^2}{x + y^2}.$$

Därmed ges gradienten av

$$\nabla f(x, y, z) = \left( \frac{x^2z + 2xy^2z}{(x + y^2)^2}, -\frac{2x^2yz}{(x + y^2)^2}, \frac{x^2}{x + y^2} \right)$$

(b) För att få riktningderivatan behöver vi ta skalärprodukten med en enhetvektor i den givna riktningen. En vektor i riktningen ges av  $(4 - 2, -1 - 1, 2 - 1) = (2, -2, 1)$  som har längd  $\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$ . I punkten  $(2, 1, 1)$  får vi

$$\nabla f(2, 1, 1) = \left( \frac{2^2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1^2 \cdot 1}{(2 + 1^2)^2}, -\frac{2 \cdot 2^2 \cdot 1 \cdot 1}{(2 + 1^2)^2}, \frac{2^2}{2 + 1^2} \right) = \left( \frac{8}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{4}{3} \right)$$

Därmed ges riktningsderivatan av skalärprodukten

$$\left(\frac{8}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27} + \frac{16}{27} + \frac{4}{9} = \frac{16 + 16 + 12}{27} = \frac{46}{27}.$$

- (c) Funktionen riktningsderivata är som störst i gradientens riktning, dvs i riktningen som ges av vektorn

$$\left(\frac{8}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{4}{3}\right)$$

eller av enhetsvektorn

$$\left(\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}\right).$$

**Svar.**

- (a) Gradienten är  $\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{x^2z+2xy^2z}{(x+y^2)^2}, -\frac{2x^2yz}{(x+y^2)^2}, \frac{x^2}{x+y^2}\right)$   
(b) Riktningsderivatan är  $46/27$ .  
(c) Riktningsderivatan är störst i riktningen  $\left(\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}\right)$ .

2. Betrakta vektorfältet  $\mathbf{F}$  som ges av

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( x + \frac{y}{2} + 3, \frac{x}{2} + y + 5 \right)$$

för  $(x, y)$  i  $\mathbb{R}^2$ .

- (a) Vad innebär det att ett vektorfält är *konservativt*? (1 p)  
 (b) Visa att vektorfältet  $\mathbf{F}$  är konservativt. (1 p)  
 (c) Använd vetskapen att vektorfältet är konservativt för att beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} \left( x + \frac{y}{2} + 3 \right) dx + \left( \frac{x}{2} + y + 5 \right) dy$$

där  $\gamma$  är någon slät kurva som börjar i  $(-2, 0)$  och slutar i  $(-2, -4)$ . (2 p)

### Lösningförslag.

- (a) Att vektorfältet är konservativt betyder att alla linjeintegraler  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  bara beror på start- och ändpunkt. Detta är detsamma som att det finns en potential  $\Phi$  så att  $\mathbf{F} = \nabla\Phi$ .  
 (b) Ett sätt att se att fältet är konservativt är att hitta en potential,  $\Phi$ . För att hitta en potential kan vi först integrera  $\mathbf{F}_1$  med avseende på  $x$ . Vi får då  $\Phi(x, y) = x^2/2 + xy/2 + 3x + C(y)$ . När vi deriverar med avseende på  $y$  får vi  $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = x/2 + C'(y)$ . Därmed kan vi välja  $C(y) = y^2/2 + 5y$  och har då hittat en potential  $\Phi(x, y) = (x^2 + xy + y^2)/2 + 3x + 5y$ . Alltså är fältet konservativt.  
 Alternativt ser vi på

$$\frac{\partial\mathbf{F}_2}{\partial x} - \frac{\partial\mathbf{F}_1}{\partial y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

och eftersom  $\mathbf{F}$  är definierad på ett enkelt sammanhängande område innebär det att  $\mathbf{F}$  är konservativt.

- (c) I och med att fältet är konservativt med potentialen  $\Phi$  kan vi beräkna kurvintegralen som

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} \left( x + \frac{y}{2} + 3 \right) dx + \left( \frac{x}{2} + y + 5 \right) dy = \Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_0, y_0).$$

I vårt fall är  $(x_0, y_0) = (-2, 0)$  och  $(x_1, y_1) = (-2, -4)$  vilket ger

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_0, y_0) &= \Phi(-2, -4) - \Phi(-2, 0) \\ &= (((-2)^2 + (-2)(-4) + (-4)^2)/2 + 3(-2) + 5(-4)) \\ &\quad - (((-2)^2 + (-2) \cdot 0 + 0^2)/2 + 3(-2) + 5 \cdot 0) \\ &= (4 + 8 + 16)/2 - 6 - 20 - (4 + 0 + 0)/2 - (-6) - 0 \\ &= 14 - 6 - 20 - 2 + 6 = -8. \end{aligned}$$

Vi kan också ersätta  $\gamma$  med en rät linje mellan start- och ändpunkt. Vi får då exempelvis parametriseringen  $\mathbf{r}(t) = (-2, -4t)$  då  $0 \leq t \leq 1$  vilket ger  $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt =$

$(0, -4) dt$  och kurvintegralen blir

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 -4(-2/2 - 4t + 5) dt = \int_0^1 16t - 16 dt = [8t^2 - 16t]_0^1 = -8.$$

**Svar.**

- (a) Att  $\mathbf{F}$  är konservativt betyder att det finns en potential  $\Phi$  med  $\mathbf{F} = \nabla\Phi$ .
- (c) Kurvintegralens värde är  $-8$ .

3. Betrakta den homogena kropp  $K$  som ges av olikheterna

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 1.$$

För att bestämma masscentrum för  $K$  behöver man bland annat beräkna integralen

$$I_z = \iiint_K z \, dx \, dy \, dz.$$

- (a) Hur beräknas masscentrum för  $K$ ? (1 p)  
 (b) Beräkna integralen  $I_z$ . (3 p)

### Lösningförslag.

(a) För att beräkna masscentrum behöver vi beräkna volymen

$$V = \iiint_K 1 \, dx \, dy \, dz$$

och de båda andra momentintegralerna

$$I_x = \iiint_K x \, dx \, dy \, dz \quad \text{och} \quad I_y = \iiint_K y \, dx \, dy \, dz.$$

Masscentrum ges sedan av  $(I_x/V, I_y/V, I_z/V)$ .

(b) Vi använder cylinderkoordinater  $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$  och har då  $dx \, dy \, dz = r \, dr \, d\theta \, dz$ . Därmed ges integralen av

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_K z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^1 zr \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[ \frac{z^2 r}{2} \right]_{r^2}^1 dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( \frac{r - r^5}{2} \right) r \, dr \, d\theta = 2\pi \left[ \frac{r^2}{4} - \frac{r^6}{12} \right]_0^1 = 2\pi \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

### Svar.

- (a) Masscentrum ges av  $(I_x/V, I_y/V, I_z/V)$  där  $V = \iiint_K 1 \, dx \, dy \, dz$  är volymen och  $I_x = \iiint_K x \, dx \, dy \, dz$  och  $I_y = \iiint_K y \, dx \, dy \, dz$ .  
 (b)  $I_z = \frac{\pi}{3}$ .

## DEL B

4. Beräkna största och minsta värdet av funktionen  $f(x, y) = x^2y$  på området som ges av olikheten  $3x^2 + 2y^2 \leq 6$ . (4 p)

**Lösningförslag.** Funktionen  $f$  är kontinuerlig i och med att den ges av ett polynom. Därför antar den ett största och ett minsta värde på det kompakta område som ges av ellipsskivan  $3x^2 + 2y^2 \leq 6$ .

Vi undersöker först om det finns några stationära punkter för  $f$ . Gradienten ges av  $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$  och denna är noll precis då  $x = 0$ . Alltså finns stationära punkter på  $y$ -axeln och där är funktionsvärdet  $f(0, y) = 0$ . Det finns inga punkter där gradienten inte är definierad.

Vi använder sedan Lagranges metod för att undersöka randpunkterna, dvs de punkter som uppfyller bivillkoret  $g(x, y) = 0$  där  $g(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 6 = 0$ . Vid en lokal extrempunkt på randen måste gradienten för  $f$  vara parallell med gradienten för  $g$ . Vi har att  $\nabla g(x, y) = (6x, 4y)$  och därmed får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2xy = \lambda 6x \\ x^2 = \lambda 4y \\ 3x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}$$

Vi kan bortse från fallet då  $x = 0$  som vi redan behandlat och vi får då att  $\lambda = x^2/(4y) = (2y)/6$  och därmed  $3x^2 = 4y^2$ . Insatt i bivillkoret ger det  $4y^2 + 2y^2 = 6$ , dvs  $y^2 = 1$ . Därmed ges lösningarna av  $y = \pm 1$  och  $x = \pm 2/\sqrt{3}$ . Vid dessa punkter har vi  $f(\pm 2/\sqrt{3}, \pm 1) = \pm 4/3$ .

Eftersom värdet för  $f$  i de stationära punkterna ligger mellan dessa båda värden har vi hittat funktionens största och minsta värde på randen och dessa är  $4/3$ , respektive  $-4/3$ .

**Svar.** Funktionen största värde är  $f(\pm 2/\sqrt{3}, 1) = 4/3$  och dess minsta värde är  $f(\pm 2/\sqrt{3}, -1) = -4/3$ .

5. De differentierbara funktionerna  $f(x, y)$  och  $g(r, \theta)$  är relaterade genom

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Vi vet att

$$\frac{\partial g}{\partial r} \left( 2, \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{och} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} \left( 2, \frac{\pi}{3} \right) = 9.$$

Använd kedjeregeln för att beräkna

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, \sqrt{3}) \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, \sqrt{3}).$$

(Det är användbart att känna till att  $\cos(\pi/3) = 1/2$  och  $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ .) **(4 p)**

**Lösningförslag.** Funktionen  $g$  ges som en sammansättning av  $f$  och  $\Phi$  där  $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Kedjeregeln formulerad för Jacobimatriserna ger därmed  $Dg = Df D\Phi$  och om vi skriver ut det får vi

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \end{bmatrix}.$$

I punkten  $(r, \theta) = (2, \pi/3)$  har vi  $\Phi(2, \pi/3) = (1, \sqrt{3})$  och

$$D\Phi = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \implies D\Phi(2, \pi/3) = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi kan invertera denna och eftersom determinanten är  $r = 2$  får vi

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

och

$$Df(1, \sqrt{3}) = Dg(2, \pi/3)(D\Phi(2, \pi/3))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 9 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}.$$

Därmed är

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, \sqrt{3}) = -2\sqrt{3} \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, \sqrt{3}) = 3.$$

Vi kan också skriva upp kedjeregeln som

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{och} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}.$$

Vi behöver därmed lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (-\sqrt{3}) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 1 = 9 \end{cases}$$

vilket med Gausselimination ger samma lösning som ovan.

**Svar.**  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, \sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$  och  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, \sqrt{3}) = 3$ .

6. Betrakta flödet av vektorfältet  $\mathbf{v}$ 

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (x + y, y, 2xy + z + 3)$$

upp genom den del av ytan  $z = 1 - x^2 - y^2$  som ligger ovanför  $xy$ -planet.

- (a) Parametrisera ytan. (1 p)  
 (b) Ställ upp integralen som beräknar flödet av  $\mathbf{v}$  med hjälp av parametriseringen från del (6a). (2 p)  
 (c) Beräkna flödet av  $\mathbf{v}$  med hjälp av integralen från del (6b). (1 p)

**Lösningförslag.**

- (a) Vi kan välja  $x$  och  $y$  som parametrar och får då ytan som  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$  där  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Ett annat alternativ är polära koordinater  $\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 1 - r^2)$ , där  $0 \leq r \leq 1$  och  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .  
 (b) Om vi använder den första parametriseringen får vi en normalvektor som

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (1, 0, -2x) \times (0, 1, -2y) = (2x, 2y, 1)$$

Denna är riktad upp genom ytan. Vi behöver beräkna skalärprodukten med fältet och sedan integrera över ytan. I och med att vi behöver multiplicera och dividera med längden av normalvektorn blir flödet

$$\iint_D 2x(x + y) + 2y^2 + 2xy + (1 - x^2 - y^2) + 3 \, dx dy = \iint_D x^2 + y^2 + 4xy + 4 \, dx dy$$

där  $D$  är enhetscirkeln i  $xy$ -planet.

Med den andra parametriseringen får vi normalvektor

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (\cos \theta, \sin \theta, -2r) \times (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) = (2r^2 \cos \theta, 2r^2 \sin \theta, r)$$

Flödet ges då av

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^2 \cos \theta (r \cos \theta + r \sin \theta) + 2r^2 \sin \theta \cdot r \sin \theta + r(2r^2 \cos \theta \sin \theta + 1 - r^2 + 3) \, dr d\theta \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 + 4r + 4r^3 \cos \theta \sin \theta \, dr d\theta. \end{aligned}$$

- (c) Vi beräknar den första integralen genom övergång till polära koordinater

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 + y^2 + 4xy + 4 \, dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 + 4r^2 \cos \theta \sin \theta + 4)r \, dr d\theta = \\ 2\pi \left[ \frac{r^4}{4} + 2r^2 \right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{9}{4} = \frac{9\pi}{2} \end{aligned}$$

där vi använt att  $\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta \, d\theta = 0$ . Om vi använt den andra parametriseringen får vi samma integral i polära koordinater.



**Svar.**

- (a) Till exempel  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$  där  $x^2 + y^2 \leq 1$  eller  $\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 1 - r^2)$ , där  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  och  $0 \leq r \leq 1$ .
- (b) Flödet ges av integralen  $\iint_D x^2 + y^2 + 4xy + 4 \, dx dy$  där  $D$  är området  $x^2 + y^2 \leq 1$  eller  $\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 + 4r + 4r^3 \cos \theta \sin \theta \, dr d\theta$ .
- (c) Flödet upp genom ytan är  $9\pi/2$ .

## DEL C

7. Låt funktionen  $f(x, y)$  vara definierad för  $(x, y) \neq (0, 0)$  genom

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}.$$

Visa att  $f$  blir kontinuerlig i origo om vi definierar  $f(0, 0) = 0$ .

(4 p)

**Lösningförslag.** Att  $f$  är kontinuerlig i origo betyder att  $f(0, 0)$  är lika med gränsvärdet av  $f(x, y)$  då  $(x, y)$  går mot  $(0, 0)$ . Om vi använder polära koordinater kan vi skriva  $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  och vi har

$$g(r, \theta) = \frac{(r \cos \theta)(r \sin \theta)^2}{r^2} = r \cos \theta \sin^2 \theta.$$

Eftersom  $|\cos \theta \sin^2 \theta| \leq 1 \cdot 1^2 = 1$  har vi att

$$|g(r, \theta)| \leq r$$

för alla  $(r, \theta)$ . Därmed får vi för varje  $\epsilon > 0$  att  $f(x, y)$  är mindre än  $\epsilon$  från 0 för alla  $(x, y)$  som ligger på avstånd mindre än  $\epsilon$  från origo. Alltså har vi att

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

och  $f$  blir kontinuerlig i origo om  $f(0, 0) = 0$ .

8. Bestäm den enkla, slutna, kontinuerligt deriverbara kurva  $C$  för vilken kraftfältet

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2y + y^3 - 12y, 24x - x^3 - 6xy^2)$$

uträttar det största arbetet, då en partikel förflyttas ett varv moturs längs  $C$ . Ange också detta största arbete. **(4 p)**

**Lösningförslag.** Enligt Greens sats får vi att

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

där  $D$  är det område som innesluts av kurvan  $C$ . Vi kan använda satsen i och med att  $\mathbf{F}$  är kontinuerligt deriverbart och  $C$  är en kontinuerligt deriverbar kurva.

I vårt fall har vi

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 24 - 3x^2 - 6y^2 - x^2 - 3y^2 + 12 = 36 - 4x^2 - 9y^2.$$

Integralen av detta skalärfält blir som störst om vi integrerar över hela det område där det är icke-negativt, dvs över hela ellipsen som ges av  $4x^2 + 9y^2 \leq 36$ . Då blir integralens värde

$$\iint_D (36 - 4x^2 - 9y^2) dx dy$$

och vi kan använda variabelbytet  $(x, y) = (3r \cos \theta, 2r \sin \theta)$  där  $0 \leq r \leq 1$  och  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Detta ger Jacobianen

$$\det \begin{bmatrix} 3 \cos \theta & -3r \sin \theta \\ 2 \sin \theta & 2r \cos \theta \end{bmatrix} = 6r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 6r.$$

Därmed blir integralens värde

$$\begin{aligned} \iint_D (36 - 4x^2 - 9y^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (36 - 36r^2) \cdot 6r dr d\theta = 2\pi \cdot 36 \cdot 6 \int_0^1 (r - r^3) dr \\ &= 432\pi \cdot \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = 108\pi. \end{aligned}$$

**Svar.** Arbetet blir som störst för ellipsen  $4x^2 + 9y^2 = 36$  genomlöps moturs och då blir arbetet  $108\pi$ .

9. Bestäm volymen av den kropp som ligger i området  $z \geq 0$  och vars tvärsnitt med plan parallella med  $xz$ -planet är liksidiga trianglar med två hörn på enhetscirkeln i  $xy$ -planet.

(4 p)

**Lösningförslag.** Tvärsnittets sida beror på  $y$  som  $s = 2\sqrt{1-y^2}$  och höjden ges av  $h = \sqrt{3}\sqrt{1-y^2}$ . Därmed ges tvärsnittsarean av  $\frac{1}{2}sh = \sqrt{3}(1-y^2)$ . Vi integrerar tvärsnittsarean över intervallet  $-1 \leq y \leq 1$  och får volymen som

$$V = \int_{-1}^1 \sqrt{3}(1-y^2) dy = \left[ y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 = \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \sqrt{3} - \left( -1 - \frac{-1}{3} \right) \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Vi kan också beräkna detta genom att se på begränsningsytan som ges av grafen för funktionen  $f(x, y) = (\sqrt{1-y^2} - |x|)\sqrt{3}$ . Vi får volymen som

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (\sqrt{1-y^2} - |x|)\sqrt{3} dx dy = \int_{-1}^1 2 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (\sqrt{1-y^2} - x)\sqrt{3} dx dy \\ &= \int_{-1}^1 2\sqrt{3} \left[ \sqrt{1-y^2}x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_{-1}^1 \sqrt{3}(1-y^2) dy \end{aligned}$$

och vi har då samma integral som ovan.

**Svar.** Volymen är  $4\sqrt{3}/3$  volymsenheter.

---