KTH Teknikvetenskap

# SF1626 Flervariabelanalys
# Lösningsförslag till tentamen 2015-08-20

## DEL A

1. Betrakta funktionen $f$ som är definierad i området där $x + y^2 \neq 0$ genom

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 z}{x + y^2}.$$

(a) Beräkna gradienten $\nabla f(x, y, z)$. **(1 p)**

(b) Bestäm riktningsderivatan av $f$ i punkten $(2, 1, 1)$ i riktning mot punkten $(4, -1, 2)$. **(2 p)**

(c) I vilken riktning växer $f$ snabbast i punkten $(2, 1, 1)$? **(1 p)**

**Lösningsförslag.**

(a) Vi beräknar de pariella derivatorna

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xz(x + y^2) - x^2 z \cdot 1}{(x + y^2)^2} = \frac{x^2 z + 2xy^2 z}{(x + y^2)^2} = xz\frac{x + 2y^2}{(x + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y \cdot x^2 z}{(x + y^2)^2} = -\frac{2x^2 yz}{(x + y^2)^2}$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x^2}{x + y^2}.$$

Därmed ges gradienten av

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{x^2 z + 2xy^2 z}{(x + y^2)^2}, -\frac{2x^2 yz}{(x + y^2)^2}, \frac{x^2}{x + y^2}\right)$$

(b) För att få riktningsderivatan behöver vi ta skalärprodukten med en enhetvektor i den givna rikningen. En vektor i riktningen ges av $(4 - 2, -1 - 1, 2 - 1) = (2, -2, 1)$ som har längd $\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$. I punkten $(2, 1, 1)$ får vi

$$\nabla f(2, 1, 1) = \left(\frac{2^2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1^2 \cdot 1}{(2 + 1^2)^2}, -\frac{2 \cdot 2^2 \cdot 1 \cdot 1}{(2 + 1^2)^2}, \frac{2^2}{2 + 1^2}\right) = \left(\frac{8}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{4}{3}\right)$$

Därmed ges riktningsderivatan av skalärprodukten

$$\left(\frac{8}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27} + \frac{16}{27} + \frac{4}{9} = \frac{16+16+12}{27} = \frac{44}{27}.$$

(c) Funktionens riktningsderivata är som störst i gradientens riktning, dvs i riktningen som ges av vektorn

$$\left(\frac{8}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{4}{3}\right)$$

eller av enhetsvektorn

$$\left(\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}\right).$$

**Svar.**

(a) Gradienten är $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{x^2z+2xy^2z}{(x+y^2)^2}, -\frac{2x^2yz}{(x+y^2)^2}, \frac{x^2}{x+y^2}\right)$

(b) Riktningsderivatan är $44/27$.

(c) Riktningsderivatan är störst i riktningen $\left(\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}\right)$.

2. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}$ som ges av

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(x + \frac{y}{2} + 3, \frac{x}{2} + y + 5\right)$$

för $(x, y)$ i $\mathbb{R}^2$.

(a) Vad innebär det att ett vektorfält är *konservativt*? **(1 p)**

(b) Visa att vektorfältet $\mathbf{F}$ är konservativt. **(1 p)**

(c) Använd vetskapen att vektorfältet är konservativt för att beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \left(x + \frac{y}{2} + 3\right)\, dx + \left(\frac{x}{2} + y + 5\right)\, dy$$

där $\gamma$ är någon slät kurva som börjar i $(-2, 0)$ och slutar i $(-2, -4)$. **(2 p)**

**Lösningsförslag.**

(a) Att vektorfältet är konservativt betyder att alla linjeintegraler $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ bara beror på start- och ändpunkt. Detta är detsamma som att det finns en potential $\Phi$ så att $\mathbf{F} = \nabla\Phi$.

(b) Ett sätt att se att fältet är konservativt är att hitta en potential, $\Phi$. För att hitta en potential kan vi först integrera $\mathbf{F}_1$ med avseende på $x$. Vi får då $\Phi(x, y) = x^2/2 + xy/2 + 3x + C(y)$. När vi deriverar med avseende på $y$ får vi $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = x/2 + C'(y)$. Därmed kan vi välja $C(y) = y^2/2 + 5y$ och har då hittat en potiential $\Phi(x, y) = (x^2 + xy + y^2)/2 + 3x + 5y$. Alltså är fältet konservativt.
Alternativt ser vi på

$$\frac{\partial\mathbf{F}_2}{\partial x} - \frac{\partial\mathbf{F}_1}{\partial y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

och eftersom $\mathbf{F}$ är definierad på ett enkelt sammanhängande område innebär det att $\mathbf{F}$ är konservativt.

(c) I och med att fältet är konservativt med potentialen $\Phi$ kan vi beräkna kurvintegralen som

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \left(x + \frac{y}{2} + 3\right)\, dx + \left(\frac{x}{2} + y + 5\right)\, dy = \Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_0, y_0).$$

I vårt fall är $(x_0, y_0) = (-2, 0)$ och $(x_1, y_1) = (-2, -4)$ vilket ger

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_0, y_0) &= \Phi(-2, -4) - \Phi(-2, 0)\\ &= (((-2)^2 + (-2)(-4) + (-4)^2)/2 + 3(-2) + 5(-4))\\ &\quad - (((-2)^2 + (-2)\cdot 0 + 0^2)/2 + 3(-2) + 5\cdot 0)\\ &= (4 + 8 + 16)/2 - 6 - 20 - (4 + 0 + 0)/2 - (-6) - 0\\ &= 14 - 6 - 20 - 2 + 6 = -8.\end{aligned}$$

Vi kan också ersätta $\gamma$ med en rät linje mellan start- och ändpunkt. Vi får då exempelvis parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (-2, -4t)$ då $\leq t \leq 1$ vilket ger $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\, dt =$

$(0, -4)\,dt$ och kurvintegralen blir

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 -4(-2/2 - 4t + 5)\,dt = \int_0^1 16t - 16\,dt = \big[8t^2 - 16t\big]_0^1 = -8.$$

**Svar.**

(a) Att $\mathbf{F}$ är konservativt betyder att det finns en potential $\Phi$ med $\mathbf{F} = \nabla\Phi$.

(c) Kurvintegralens värde är $-8$.

3. Betrakta den homogena kropp $K$ som ges av olikheterna
$$x^2 + y^2 \leq z \leq 1.$$
För att bestämma masscentrum för $K$ behöver man bland annat beräkna integralen
$$I_z = \iiint_K z\, dxdydz.$$
(a) Hur beräknas masscentrum för $K$? **(1 p)**
(b) Beräkna integralen $I_z$. **(3 p)**

**Lösningsförslag.**

(a) För att beräkna masscentrum behöver vi beräkna volymen
$$V = \iiint_K 1\, dxdydz$$
och de båda andra momentintegralerna
$$I_x = \iiint_K x\, dxdydz \quad \text{och} \quad I_y = \iiint_K y\, dxdydz.$$
Masscentrum ges sedan av $(I_x/V, I_y/V, I_z/V)$.

(b) Vi använder cylinderkoordinater $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ och har då $dxdydz = r\, drd\theta dz$. Därmed ges integralen av
$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_K z\, dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 zr\, dzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\frac{z^2 r}{2}\right]_{r^2}^1 drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{r - r^5}{2}\right) drd\theta = 2\pi\left[\frac{r^2}{4} - \frac{r^6}{12}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

**Svar.**

(a) Masscentrum ges av $(I_x/V, I_y/V, I_z/V)$ där $V = \iiint_K 1\, dxdydz$ är volymen och $I_x = \iiint_K x\, dxdydz$ och $I_y = \iiint_K y\, dxdydz$.
(b) $I_z = \frac{\pi}{3}$.

## DEL B

4. Beräkna största och minsta värdet av funktionen $f(x, y) = x^2y$ på området som ges av olikheten $3x^2 + 2y^2 \leq 6$. **(4 p)**

**Lösningsförslag.** Funktionen $f$ är kontinuerlig i och med att den ges av ett polynom. Därför antar den ett största och ett minsta värde på det kompakta område som ges av ellipsskivan $3x^2 + 2y^2 \leq 6$.

Vi undersöker först om det finns några stationära punkter för $f$. Gradienten ges av $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$ och denna är noll precis då $x = 0$. Alltså finns stationära punkter på $y$-axeln och där är funktionsvärdet $f(0, y) = 0$. Det finns inga punkter där gradienten inte är definierad.

Vi använder sedan Lagranges metod för att undersöka randpunkterna, dvs de punkter som uppfyller bivillkoret $g(x, y) = 0$ där $g(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 6 = 0$. Vid en lokal extrempunkt på randen måste gradienten för $f$ vara parallell med gradienten för $g$. Vi har att $\nabla g(x, y) = (6x, 4y)$ och därmed får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2xy &= \lambda 6x \\ x^2 &= \lambda 4y \\ 3x^2 + 2y^2 &= 6 \end{cases}$$

Vi kan bortse från fallet då $x = 0$ som vi redan behandlat och vi får då att $\lambda = x^2/(4y) = (2y)/6$ och därmed $3x^2 = 4y^2$. Insatt i bivillkoret ger det $4y^2 + 2y^2 = 6$, dvs $y^2 = 1$. Därmed ges lösningarna av $y = \pm 1$ och $x = \pm 2/\sqrt{3}$. Vid dessa punkter har vi $f(\pm 2/\sqrt{3}, \pm 1) = \pm 4/3$.

Eftersom värdet för $f$ i de stationära punkterna ligger mellan dessa båda värden har vi hittat funktionens största och minsta värde på randen och dessa är $4/3$, respektive $-4/3$.

**Svar.** Funktionens största värde är $f(\pm 2/\sqrt{3}, 1) = 4/3$ och dess minsta värde är $f(\pm 2/\sqrt{3}, -1) = -4/3$.

5. De differentierbara funktionerna $f(x,y)$ och $g(r,\theta)$ är relaterade genom
$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$
Vi vet att
$$\frac{\partial g}{\partial r}\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{och} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = 9.$$
Använd kedjeregeln för att beräkna
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, \sqrt{3}) \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1, \sqrt{3}).$$
(Det är användbart att känna till att $\cos(\pi/3) = 1/2$ och $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.) **(4 p)**

**Lösningsförslag.** Funktionen $g$ ges som en sammansättning av $f$ och $\Phi$ där $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Kedjeregeln formulerad för Jacobimatriserna ger därmed $Dg = Df D\Phi$ och om vi skriver ut det får vi
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \end{bmatrix}.$$
I punkten $(r,\theta) = (2, \pi/3)$ har vi $\Phi(2,\pi/3) = (1, \sqrt{3})$ och
$$D\Phi = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad D\Phi(2,\pi/3) = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix}.$$
Vi kan invertera denna och eftersom determinanten är $r = 2$ får vi
$$\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$
och
$$Df(1,\sqrt{3}) = Dg(2,\pi/3)(D\Phi(2,\pi/3))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 9 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}.$$
Därmed är
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,\sqrt{3}) = -2\sqrt{3} \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,\sqrt{3}) = 3.$$
Vi kan också skriva upp kedjeregeln som
$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{och} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}.$$
Vi behöver därmed lösa ekvationssystemet
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (-\sqrt{3}) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 1 = 9 \end{cases}$$
vilket med Gausselimination ger samma lösning som ovan.

**Svar.** $\frac{\partial f}{\partial x}(1,\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(1,\sqrt{3}) = 3$.

6. Betrakta flödet av vektorfältet $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (x + y, y, 2xy + z + 3)$$

upp genom den del av ytan $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför $xy$-planet.

(a) Parametrisera ytan. **(1 p)**

(b) Ställ upp integralen som beräknar flödet av $\mathbf{v}$ med hjälp av parametriseringen från del (6a). **(2 p)**

(c) Beräkna flödet av $\mathbf{v}$ med hjälp av integralen från del (6b). **(1 p)**

**Lösningsförslag.**

(a) Vi kan välja $x$ och $y$ som parametrar och får då ytan som $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$ där $x^2 + y^2 \leq 1$. Ett annat alternativ är polära koordinater $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1 - r^2)$, där $0 \leq r \leq 1$ och $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(b) Om vi använder den första parametriseringen får vi en normalvektor som

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = (1, 0, -2x) \times (0, 1, -2y) = (2x, 2y, 1)$$

Denna är riktad upp genom ytan. Vi behöver beräkna skalärprodukten med fältet och sedan integrera över ytan. I och med att vi behöver multiplicera och dividera med längden av normalvektorn blir flödet

$$\iint_D 2x(x + y) + 2y^2 + 2xy + (1 - x^2 - y^2) + 3\, dxdy = \iint_D x^2 + y^2 + 4xy + 4\, dxdy$$

där $D$ är enhetscirkeln i $xy$-planet.

Med den andra parametriseringen får vi normalvektor

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (\cos\theta, \sin\theta, -2r) \times (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0) = (2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta, r)$$

Flödet ges då av

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^2\cos\theta(r\cos\theta + r\sin\theta) + 2r^2\sin\theta \cdot r\sin\theta + r(2r^2\cos\theta\sin\theta + 1 - r^2 + 3)\, drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 + 4r + 4r^3\cos\theta\sin\theta\, drd\theta.$$

(c) Vi beräknar den första integralen genom övergång till polära koordinater

$$\iint_D x^2 + y^2 + 4xy + 4\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 + 4r^2\cos\theta\sin\theta + 4) r\, drd\theta =$$

$$2\pi \left[\frac{r^4}{4} + 2r^2\right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{9}{4} = \frac{9\pi}{2}$$

där vi använt att $\int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = 0$. Om vi använt den andra parametriseringen får vi samma integral i polära koordinater.

**Svar.**

(a) Till exempel $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, 1-x^2-y^2)$ där $x^2+y^2 \leq 1$ eller $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1-r^2)$, där $0 \leq \theta \leq 2\pi$ och $0 \leq r \leq 1$.

(b) Flödet ges av integralen $\iint_D x^2 + y^2 + 4xy + 4\, dxdy$ där $D$ är området $x^2 + y^2 \leq 1$ eller $\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 + 4r + 4r^3 \cos\theta \sin\theta \, drd\theta$.

(c) Flödet upp genom ytan är $9\pi/2$.

## DEL C

7. Låt funktionen $f(x,y)$ vara definierad för $(x,y) \neq (0,0)$ genom
$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$
Visa att $f$ blir kontinuerlig i origo om vi definierar $f(0,0)=0$. **(4 p)**

**Lösningsförslag.** Att $f$ är kontinuerlig i origo betyder att $f(0,0)$ är lika med gränsvärdet av $f(x,y)$ då $(x,y)$ går mot $(0,0)$. Om vi använder polära koordinater kan vi skriva $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ och vi har
$$g(r,\theta) = \frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)^2}{r^2} = r\cos\theta\sin^2\theta.$$
Eftersom $|\cos\theta\sin^2\theta| \leq 1\cdot 1^2 = 1$ har vi att
$$|g(r,\theta)| \leq r$$
för alla $(r,\theta)$. Därmed får vi för varje $\epsilon > 0$ att $f(x,y)$ är mindre än $\epsilon$ från $0$ för alla $(x,y)$ som ligger på avstånd mindre än $\epsilon$ från origo. Alltså har vi att
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$
och $f$ blir kontinuerlig i origo om $f(0,0)=0$.

8. Bestäm den enkla, slutna, kontinuerligt deriverbara kurva $C$ för vilken kraftfältet

$$\mathbf{F}(x,y) = (x^2y + y^3 - 12y, 24x - x^3 - 6xy^2)$$

uträttar det största arbetet, då en partikel förflyttas ett varv moturs längs $C$. Ange också detta största arbete. **(4 p)**

**Lösningsförslag.** Enligt Greens sats får vi att

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

där $D$ är det område som innesluts av kurvan $C$. Vi kan använda satsen i och med att $\mathbf{F}$ är kontinuerligt deriverbart och $C$ är en kontinerligt deriverbar kurva.

I vårt fall har vi

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 24 - 3x^2 - 6y^2 - x^2 - 3y^2 + 12 = 36 - 4x^2 - 9y^2.$$

Integralen av detta skalärfält blir som störst om vi integrerar över hela det område där det är icke-negativt, dvs över hela ellipsen som ges av $4x^2 + 9y^2 \leq 36$. Då blir integralens värde

$$\iint_D (36 - 4x^2 - 9y^2)\, dxdy$$

och vi kan använda variabelbytet $(x,y) = (3r\cos\theta, 2r\sin\theta)$ där $0 \leq r \leq 1$ och $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Detta ger Jacobianen

$$\det\begin{bmatrix} 3\cos\theta & -3r\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2r\cos\theta \end{bmatrix} = 6r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 6r.$$

Därmed blir integralens värde

$$\iint_D (36 - 4x^2 - 9y^2)\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (36 - 36r^2)\cdot 6r\, drd\theta = 2\pi\cdot 36\cdot 6\int_0^1 (r - r^3)\, dr$$

$$= 432\pi\cdot\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 108\pi.$$

**Svar.** Arbetet blir som störst för ellipsen $4x^2 + 9y^2 = 36$ genomlöps moturs och då blir arbetet $108\pi$.

9. Bestäm volymen av den kropp som ligger i området $z \geq 0$ och vars tvärsnitt med plan parallella med $xz$-planet är liksidiga trianglar med två hörn på enhetscirkeln i $xy$-planet.

**(4 p)**

**Lösningsförslag.** Tvärsnittets sida beror på $y$ som $s = 2\sqrt{1-y^2}$ och höjden ges av $h = \sqrt{3}\sqrt{1-y^2}$. Därmed ges tvärsnittsarean av $\frac{1}{2}sh = \sqrt{3}(1-y^2)$. Vi integrerar tvärsnittsarean över intervallet $-1 \leq y \leq 1$ och får volymen som

$$V = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}(1-y^2)\,dy = \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\sqrt{3} - \left(-1 - \frac{-1}{3}\right)\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Vi kan också beräkna detta genom att se på begränsningsytan som ges av grafen för funktionen $f(x,y) = (\sqrt{1-y^2} - |x|)\sqrt{3}$. Vi får volymen som

$$V = \iint_D (\sqrt{1-y^2} - |x|)\sqrt{3}\,dxdy = \int_{-1}^{1} 2\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (\sqrt{1-y^2} - x)\sqrt{3}\,dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1} 2\sqrt{3}\left[\sqrt{1-y^2}x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}(1-y^2)\,dy$$

och vi har då samma integral som ovan.

**Svar.** Volymen är $4\sqrt{3}/3$ volymsenheter.