Institutionen för Matematik

SF1625
Calculus 1
Year 2015/2016

Module 3
Inverse, exp, log, arc, ODE

Chapter 3 and section 18.6 in Calculus by Adams and Essex. Three lectures, two tutorials, one seminar.

Important concepts. We introduce the concept of an **inverse** function and some examples of this: **exponential functions** and **logarithmic functions**, **trigonometric functions** and **inverse trigonometric functions**. We also introduce a class of **differential equations**, constant coefficient linear odinary differential equations. These are quite simple but still have many important applications.

It is important to master the basic properties of functions you study in this chapter – the laws of the exponent and the laws of logarithm, for instance, and also the basic properties af the arc-functions. You have to learn how to differentiate these functions and more complicated combinations of these functions and to use the derivative to draw conclusions about the function.

There is some terminology in connection with differential equations. You need to understand words like **order, linear, homogeneous, initial value problem** and **characteristic equation**.

The differential equations of this chapter can be solved with a special method. Using the characteristic equation you find all solutions to the homogeneous equation y_h (if the order is 2 there are three cases). Then you find a particular solution y_p (if the equation is homogeneous you dont do this step). Then you add $y = y_h + y_p$. If initial conditions are given you use this to determine the costants of y. An interisting phenomenon is **resonanse**.

Rekommended exercises in Calculus. Ch 3.1: 3, 9, 23. Ch 3.2: 3, 5, 9, 15, 25, 29. Ch 3.3: 3, 5, 7, 9, 19, 21, 31, 33, 43, 51, 59. Ch 3.4: 1, 3, 5, 9, 11, 17, 23, 25. Ch 3.5: 1, 3, 5, 7, 13, 19, 21, 23, 35. Ch 3.7: 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 29. Ch 18.6: 1, 3, 5, 7.

CAN YOU SOLVE THESE EXERCISES?

Exercise 1. Let $f(x) = \dfrac{e^{kx}}{1+e^{kx}}$.

A. Find the domain of definition of f.
B. At what points ís f continuous?
C. Compute $f'(x)$.
D. At what points ís f differentiable?

Exercise 2. Låt $g(x) = x\ln x - x$.

A. A. Find the domain of definition of g.
B. At what points ís g continuous?
C. Compute $g'(x)$.
D. At what points ís g differentiable?

Exercise 3. Låt $h(t) = \arctan t + \arctan \frac{1}{t}$.

A. Find the domain of definition of h.
B. At what points ís h continuous?
C. Compute $h'(t)$.
D. At what points ís h differentiable?
E. Can you draw the graph $y = h(t)$?

Exercise 4. Differentiate with respect to x and state where these functions are differentiable:

A. xe^{-x}.

B. xe^{-x^2}.

C. $\ln\sqrt{1+x^2}$.

D. $e^{-|x|}$

E. $e^{2x}\sin 3x$

F. $\arcsin\sqrt{x}$

Exercise 5. Find an equation of the tangent to $y = \ln x$ at the point with x-coordinate 1. Can you find an approximate value of $\ln 1.1$?

Exercise 6. Find an equation of the tangent to $y = e^{-x^2}$ at the point with x-coordinate -1.

Exercise 7. On what intervals is $f(x) = xe^{-x^2/2}$ increasing?

Exercise 8. Simplify these expressions:
A. $2\ln 6 - \ln 4 - \ln 9$
B. $\ln(e^{2x} \cdot e^{-x})$
C. $\arccos \frac{1}{2}$
D. $\sin(\arccos x)$
E. $\arctan \sqrt{3}$

Exercise 9. About inverses:
A. Find the inverse of $f(x) = 1 + e^{3x}$. State the domain of definition and range of the inverse.
B. Using the derivative, how can you prove the invertibility of $g(x) = x + e^{3x}$ without computing the inverse?

Exercise 10. Solve these differential equations:
A. $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$
B. $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 10$
C. $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0$
D. $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = t + 1$

Exercise 11. Solve the initial value problem

$$\begin{cases} y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 18 \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Exercise 12. Solve the initial value problem

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin t \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. A. Funktionen är definierad för alla reella tal x
1. B. Funktonen är kontinuerlig överallt.
1. C. $f'(x) = \dfrac{ke^{kx}}{(1+e^{kx})^2}$
1. D. Funktionen är deriverbar överallt.

2. A. Alla $x > 0$
2. B. Samma svar som i 2A.
2. C. $g'(x) = \ln x$
2. D. Samma svar som A och B

3. A. Definitionsmängden är alla reella tal $t \neq 0$.
3. B. Funktionen är kontinuerlig överallt utom i origo.
3. C och D. h är deriverbar överallt utom i origo och för alla $t \neq 0$ gäller att $h'(t) = 0$
3. E. $h(t) = \pi/2$ för alla $t > 0$ och $h(t) = -\pi/2$ för alla $t < 0$. Nu är det lätt att rita grafen.

4. A. $e^{-x}(1-x)$, existerar för alla x
4. B. $e^{-x^2}(1-2x^2)$, existerar för alla x
4. C. $\dfrac{x}{1+x^2}$ definierat för alla x
4. D. $-e^{-x}$ om x är positivt och e^x om x är negativt. Existerar för alla $x \neq 0$
4. E. $2e^{2x}\sin 3x + 3e^{2x}\cos 3x$, existerar för alla x
4. F. $\dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$, existerar när $0 < x < 1$.

5. Tangent: $y = x - 1$. Och $\ln 1.1 \approx 0.1$

6. $y - \dfrac{1}{e} = \dfrac{2}{e}(x+1)$.

7. Funktionen är strängt växande på intervallet $-1 \leq x \leq 1$

8. A. 0
8. B. x
8. C. $\pi/3$
8. D. $\sqrt{1-x^2}$ om $-1 \leq x \leq 1$ (annars är uttrycket inte definierat).
8. E. $\pi/3$

9. A. $f^{-1}(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{3}$. Definitionsmängden för f^{-1} är alla $x > 1$. Värdemängden är alla reella tal.
9. B. Eftersom $g'(x) = 1 + 3e^{3x} > 0$ för alla x så är g strängt växande och därmed inverterbar.

10. A. $y(t) = Ce^t + De^{2t}$, där C och D är godtyckliga konstanter.
10. B. $y(t) = Ce^t + De^{2t} + 5$, där C och D är godtyckliga konstanter.
10. C. $y(t) = e^{2t}(A\cos t + B\sin t)$, där A och B är godtyckliga konstanter.
10. D. $y(t) = e^{2t}(A\cos t + B\sin t) + \dfrac{1}{5}t + \dfrac{9}{25}$, där A och B är godtyckliga konstanter.

11. $y(t) = te^{3t} + 2$

12. $y(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t$