Department of mathematics

SF1625
Calculus 1
Year 2015/2016

Module 4
Applications of differentiation

Chapter 4 of Calculus by Adams and Essex. Three lectures, two tutorials, one seminar.

Important concepts. This is about **applications of differentiation.** Examples **extremal values** of a function (max / min), **approximation** of a function (**linear approximation** or more general approximation with **Taylor's formel**) and **curve sketching**.

It is important to be able to **use the derivative** as a measure of the rate of change of a function as in section 4.1 about related rates. Other applications are **equation solving** using Newton-Raphson's method and **computing limits**. Using the second derivative we can decide if the function is **convex (concave up)** or **concave (concave down)** . **Asymptotes** is another theme.

You have to learn to master the craft of differentiation, and make sign charts of the derivative and draw conclusions from them. Be careful to note that **lokal extremal point** and **kritical point** are not one and the same thing.

When you look for extremal values the first question is that about the existence of such values. Here the max-min theorem from chapter 1 might come in handy: if the function is continuous on a closed and bounded interval, then a maximum and a minimum value exist. These must then be attained at critical points, singular points or endpoints of the interval.

Recommended exercises from Calculus. Ch 4.1: 5, 7, 9, 16, 17. Ch 4.2: 7, 9. Ch 4.3: 1, 5, 17. Ch 4.4: 3, 14, 29, 35. Ch 4.5: 5, 11, 27, 31. Ch 4.6: 3, 5, 9, 17, 31. Ch 4.8: 1, 7, 13, 21. Ch 4.9: 1, 3, 13, 30. Ch 4.10: 1, 5, 9

CAN YOU SOLVE THESE EXERCISES?

Exercise 1. Let $f(x) = xe^{-x}$.

A. Find the domain of definition of f. use the derivative to find where f is increasing and decreasing and find all local extremal values. Compute the relevant limits and sketch $y = f(x)$.

B. Using the above you are also able to answer questions like: What is the range of f? Does f have a maximum and a minimum value? Is there an x such that $f(x) = 1$?

C. Using the second derivative you can also find the intervals where f is concave up and concave down, respectively.

D. Find all asymptotes of $y = f(x)$.

Exercise 2. Same questions as above for $g(x) = \arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$.

Exercise 3. Let $h(t) = t - \sin t$.

A. Find all critical points of h
B. Find all local extreme points of h
C. Does h attain a maximum and a minimum value?

Exercise 4. Let $f(x) = \ln(1 + x)$.

A. Find the Taylor polynomial of deg 2 to f around the point $x = 0$.
B. Use the Taylor polynomial to approximate $\ln 2$, i.e. $f(1)$.
C. Is the error less than $1/3$?

Exercise 5. More about Taylor's formula.

A. Find an approximation of $\cos\dfrac{1}{10}$ with an error of at most 10^{-5}.
B. Find an approximation of $\sqrt{104}$ with an error of at most $5 \cdot 10^{-5}$.

Exercise 6. We want to solve the equation $x^3 + x = 1$

A. Show using derrivatives that the equation has at most one solution.
B. Show using intermediate values that the equation has at least one solution lbetween 0 and 1.
C. Approximate the solution using two iterations of Newton-Raphson's method.

Exercise 7. Compute the limits:

A. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{\tan h}$

B. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + \cos x - e^x}{x^2}$

C. $\lim_{t \to 1} \frac{\sin t - \sin 1}{t - 1}$

Exercise 8. Extremal value problems:

A. Does $f(x) = xe^{-x^2/2}$ assume a maximum and a minimum value? If so, find them.

B. Does $f(x) = |x - 1| + \sqrt{x + 1}$ assume a maximum and a minimum value when x varies in the interval $[-1, 2]$? If so, find them.

Exercise 9. A spherical tank with radius 5 dm is filled with water at a speed of 3 liters per minute. How fast is the surface of the water rising at the time when the water is 2 dm deep? Hint: The volume V of the water in the tank is related to the depth d by

$$V = \pi \frac{15d^2 - d^3}{3}.$$

Exercise 10. Let $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$.

A. Find all local extremal values of f.

B. Find all asymptotes to the curve $y = f(x)$.

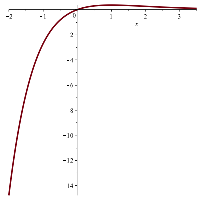
C. Compute relevant limits and sketch the graph $y = f(x)$.

Exercise 11. The area of a right circular cone with height h and bottom radius r is given by $\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$. Given such a cone with $h = 8$ dm and $r = 6$ dm. Use linear approximation to find by approximately how much the area increases if the radius of cone changes by 0.5 dm.

Exercise 12. Compute the smallest distance from the curve $y = 1 - x^2$ to the origin.

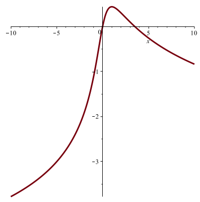
FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. A. Definitionsmängden är hela reella axeln. Det finns en enda kritisk punkt nämligen $x = 1$. Teckenschema för derivatan ger att den kritiska punkten är en lokal och global maxpunkt. Maxvärdet är $f(1) = 1/e$. Gränsvärdet i oändligheten är 0. Gränsvärdet i minus oändligheten är $-\infty$. Graf:



1. B. Alla reella tal mindre än eller lika med $1/e$
Största värdet är $1/e$, minsta värde saknas.
Nej, eftersom funktionens största värde är $1/e$ som är mindre än 1
1. C. Det finns en inflektionspunkt nämligen $x = 2$. Funktionen är konkav för $x < 2$ och konvex för $x > 2$.
1. D. $y = 0$ är asymptot när $x \to \infty$. Inga andra asymptoter finns.

2. A. Definitionsmängden är hela reella axeln. Det finns en enda kritisk punkt nämligen $x = 1$. Teckenschema för derivatan ger att den kritiska punkten är en lokal och global maxpunkt. Maxvärdet är $g(1) = \pi/4 - \ln 2$. Gränsvärdet i oändligheten är $-\infty$. Gränsvärdet i minus oändligheten är $-\infty$. Graf:



2. B. Alla reella tal mindre än eller lika med $\pi/4 - \ln 2$
Största värdet är $\pi/4 - \ln 2$, minsta värde saknas.
Två, eftersom $1/10$ är mindre än $\pi/4 - \ln 2$ (titta på grafen)

3. A. Det finns oändligt många kritisk punkter (punkter där derivatan är noll), nämligen $t = \pm\pi/6 + n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.
3. B. Funktionen har inga lokala extrempunkter.
3. C. Funktionen saknar största och minsta värde. (den är strängt växande på hela reella axeln, de kritiska punkterna är allihop terasspunkter (som alltså inte är extrempunkter))

4. A. Det sökta polynomet är $p(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$

4. B. $\ln 2 = f(1) \approx 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$

4. C. Felet i approximationen i B ges av $\dfrac{2/(c+1)^3}{3!} \cdot 1^3$ för något c mellan 0 och 1. Detta är högst $1/3$.

5. A. $\cos \frac{1}{10} \approx 0.995$ med ett fel som är mindre än 10^{-5}

5. B. $\sqrt{104} \approx 10.198$ med ett fel som är mindre än $5 \cdot 10^{-5}$

6. Sätt $f(x) = x^3 + x - 1$. Ekvationen är då ekvivalent med $f(x) = 0$. Derivatan är positiv överallt, vilket medför att f är strängt växande och att högst en lösning kan finnas. Då $f(0) = -1$ och $f(1) = 1$ och f är kontinuerlig överallt följer av satsen om mellanliggande värden att det finns en lösning mellan 0 och 1. Med startvärde $x_0 = 0$ och två iterationer med Newton-Raphson fås lösningen som ungefär $x_2 = 3/4$.

7. A. $1/2$
7. B. -1
7. C. $\cos 1$

8. A. Ja, minsta värdet är $-1/\sqrt{e}$ och största värdet är $1/\sqrt{e}$. Se exempel 8 i bokens kap 4.6. Här måste man göra teckenschema för derivatan och beräkna gränsvärden i $\pm\infty$ för att veta om största/minsta värde finns.

8. B. Ja, den här funktionen är kontinuerlig på hela det slutna och begränsade intervallet så största och minsta värde finns garanterat enligt max-min-satsen från Ch 1. Dessa kan antas i kritiska punkter, ändpunkter eller singulära punkter. Det finns en kritisk punkt $x = -3/4$, en singulär punkt $x = 1$ och ändpunkterna är -1 och 2. Kolla dessa och se att minsta värdet är $\sqrt{2}$ (antas i den singulära punkten) och största värdet är $1 + \sqrt{3}$ (antas i högra ändpunkten).

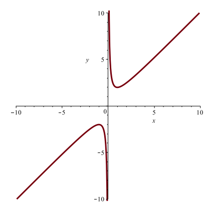
9. Ytan stiger i takten $3/16$ dm per minut.

10. A. $f(x)$ är definierat för alla $x \neq 0$. Teckenschema för derivatan:
Om $x < -1$ så är $f'(x) > 0$ och funktionen är alltså strängt växande.
Om $x = -1$ så är $f'(x) = 0$
Om $-1 < x < 0$ så är $f'(x) < 0$ och funktionen är alltså strängt avtagande.
Om $x = 0$ så är $f(x)$ inte definierat.
Om $0 < x < 1$ så är $f'(x) < 0$ och funktionen är alltså strängt avtagande.
Om $x = 1$ så är $f'(x) = 0$
Om $x > 1$ så är $f'(x) > 0$ och funktionen är alltså strängt växande.
Det följer av teckenschemat att f har en lokal maxpunkt i $x = -1$ och en lokal minpunkt i $x = 1$.

B. Eftersom $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ och $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ så är linjen $x = 0$ lodrät asymptot till kurvan.

Med hjälp av omskrivningen $\dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$ ser vi att linjen $y = x$ är sned asymptot i $\pm\infty$

C. Kurvan:



11. Arean ökar med ungefär 13.6π kvadratdecimeter
12. Minsta avståndet är $\sqrt{3}/2$ längdenheter.