Department of Mathematics

SF1625
Calculus 1
Year 2015/2016

Module 5
Integrals

Chapter 5 and Sections 6.1-6.2 in Calculus by Adams and Essex. Three lectures, two tutorials and one seminar.

Important concepts. This is all about **integrals.** A definition makes clear what it means for a funciton to be integrable on an interval and what the integral of f on that interval is. But you seldom use the definition to compute integrals, but other methods that build on the definition. The most important theorem is **the fundamental theorem of calculus** that states that differentiation and integration are in some sense inverse operations. A consequence is that you can use anti-derivatives to compute integrals. It is sometimes hard to find anti-derivatives, and so there are several techniques of integration to help you find them: **substitutions** and **integration by parts** are such techniques. For rational functions **partial fractions** might come in handy. Numerical methods are in practice often indispensible.

You need to practice **integration** a lot. First you have to understand the techniques of integration, but that is not enough, you also have to get a feel for when to use the different techniques. That comes with practice.

Rekommended exercises in Calculus. Ch 5.1: 1, 3, 7, 9, 17, 33. Ch 5.2: 1, 3. Ch 5.3: 1, 5, 9, 11, 17. Ch 5.4: 1, 3, 23. Ch 5.5: 3, 8, 27, 33, 39, 40, 41. Ch 5.6: 5, 6, 7, 9, 21, 23, 43. Ch 5.7: 11, 17. Ch 6.1: 1, 3, 5, 7, 13, 21. Ch 6.2: 1, 5, 9, 11, 13, 23.

CAN YOU SOLVE THESE EXERCISES?

Exercise 1. Compute the integrals:

A. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$

B. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$

C. $\displaystyle\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

D. $\displaystyle\int \frac{dx}{x}$

E. $\displaystyle\int \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) dx$

Exercise 2. Compute the integrals using the method of substitution:

A. $\displaystyle\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{1+4x^2}$ (put $u = 2x$)

B. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$ (put $t = 1 + x^2$)

C. $\displaystyle\int_{-1}^{0} xe^{-x^2}\, dx$ (put $t = x^2$)

D. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}\, dx$ (tput $t = \ln x$)

E. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\, dx$ (put $u = \sin x$)

Exercise 3. Compute the integrals using integration by parts:

A. $\displaystyle\int_{0}^{1} xe^{-x}\, dx$

B. $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{e}} x \ln x\, dx$

C. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} x \sin x\, dx$

D. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx$

Exercise 4. Compute the integrals. Are there any symmetries that make them easier to compute?

A. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sin x \, dx$

B. $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{|x|} \, dx$

C. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \arctan x \, dx$

Exercise 5. Compute the integrals using partial fractions:

A. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2 - 9}$

B. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$

C. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^2}{x^2 + 4x + 3} \, dx$

Exercise 6. Compute the integrals:

A. $\displaystyle\int_{0}^{1} \arctan x \, dx$

B. $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \arcsin t \, dt$

C. $\displaystyle\int_{1}^{e} (\ln u)^2 \, du$

Exercise 7. Differentiate with respect to x:

A. $\displaystyle\int_{0}^{x} \sqrt{1+t} \, dt$

B. $\displaystyle\int_{x}^{0} \sqrt{1+t} \, dt$

C. $\displaystyle\int_{0}^{x^2} \sqrt{1+t} \, dt$

Exercise 8. Let $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} \cos(t^2) \, dt$. Compute $F(0)$, $F'(0)$ and $F''(x)$ and compute $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x}$.

Exercise 9. Prove these inequalities:

A. $\displaystyle\int_a^b \sin^2 x\,dx < \int_a^b |\sin x|\,dx$ om $a < b$.

B. $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-|x|} < 2$

C. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx < 1$

Exercise 10. Approximate $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x}$ with a lower Riemann sum

A. Of two terms
B. Of four terms
C. Use B to give an approximate value of $\ln 2$. Explain!

Exercise 11. More about Riemann sums:

A. Write down an integral that is approximated by the sum $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{k}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{10}$.

B. Compute $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n}$

Exercise 12. We study $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

A. Is e^{-x^2} integrable on $[0, 1]$? Why?
B. Can you find an anti-derivative?
C. Can you approximate I ? Do it!

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. A. $\arctan x + C$ där C är en godtycklig konstant
1. B. $2\sqrt{1+x} + C$ där C är en godtycklig konstant
1. C. $\pi/6$ (obs ingen konstant C här!)
1. D. $\ln|x|?C$ där C är en godtycklig konstant
1. E. $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{1}{2x^2} + C$ där C är en godtycklig konstant

2. A. $\pi/24$
1. B. 1
1. C. $\dfrac{1-e}{2e}$
1. D. $1/2$
1. E. $1/2$

3. A. $1 - \frac{2}{e}$
3. B. $\dfrac{2+e}{4}$
3. C. 1
3. D. $\pi - 2$
3. E. $4/15$

4. A. 0
4. B. $2e - 2$ (integranden är jämn och integralen $= 2\int_0^1 e^x\,dx$)
4. C. 0 (integranden är udda och intervallet symmetriskt runt origo)

5. A. $-\dfrac{1}{6}\ln 5$
5. B. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$
5. C. $2 + 5\ln 3 - \dfrac{9}{2}\ln 5$ (utför polynomdivision först)

6. A. $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2$
6. B. $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1$
6. C. 1

7. A. $\sqrt{1+x}$
7. B. $-\sqrt{1+x}$
7. C. $2x\sqrt{1+x}$

8. $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ och $F''(x) = 2x\sin x^2$ som är begränsat nära origo så det sökta gränsvärdet fås med Taylorutveckling eller l'Hospials regel till 1.

9. Tips: om en funktion är mindre än en annan i ett helt intervall så är integralen över det intervallet mindre än motsvarande integral för den andra funktionen.

10. A. $\dfrac{1}{3/2}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = 7/12$

10. B. $\dfrac{1}{5/4} \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3/2} \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{7/4} \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} = 533/840 \approx 0.6345$

10. C. Eftersom integralen är exakt $\ln 2$ approximerar Riemannsumman i B (och A) detta tal. Så $\ln 2 \approx 0.6345$. Felet i approximationen har vi nu inte analyserat så vi vet inte hur bra den är.

11. A. $\displaystyle\int_0^1 x^3\, dx$

11. B. $1/4$

12. A. Ja! Funktionen är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet. Därför är den integrerbar.

12. B. Nej! Det går inte att skriva upp en primitiv funktion med hjälp av elementära uttryck.

12. C. Det finns flera sätt. Ett sätt är med hjälp av Riemannsummor (eller trapetsregeln om man känner till den). Ett annat sätt är att Taylorutveckla. Om man Taylorutvecklar integranden upp till grad 4 så får man att

$I \approx \displaystyle\int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx = 23/30 \approx 0.77$. Felet i denna approximation är mindre än $1/42$.