Department of Mathematics

SF1625
Calculus 1
Year 2015/2016

Module 6: Integrals and applications

Sections 6.3 and 6.5 and Chapter 7 in Calculus by Adams and Essex. Three lectures, two tutorials and one seminar.

Important concepts. This is about **integrals** and their **applications**. Section 6.3 continues with substitutions och in section 6.5 **improper integrals** are discussed. There are two types of the latter: where the interval of integration is unbounded and where the function is unbounded. The solution in both cases is to take limits. In chapter 7 we turn to applications. It is important to learn the technique using Riemann sums as for example in the derivation of the formula for arclength in section 7.3 See also exercise 10 below.

It is more important to master the method mentioned above than to remember formulas from physics. You have to make sure you can derive the formulas for solids of revolution, areas of revolution and arc length.

Rekommended exercises in Calculus. Ch 6.3: 1, 3, 9. Ch 6.5: 1, 3, 5, 15, 23, 33, 34, 35. Ch 7.1: 1, 3, 5, 13, 19, 21. Ch 7.2: 1, 3. Ch 7.3: 3, 11, 21. Ch 7.4: 1, 3, 5. Ch 7.6: 1, 7. Ch 7.7: 1, 5.

CAN YOU SOLVE THESE EXERCISES?

Exercise 1. Compute the integrals. In what way are they improper?

A. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

B. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

C. $\displaystyle\int_1^\infty xe^{-x}\,dx$

D. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

E. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

Exercise 2. Decide if these integrals are convergent or divergent.

A. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$

B. $\displaystyle\int_{10}^\infty \frac{x+\ln x}{x^2}\,dx$

C. $\displaystyle\int_0^\infty x\sin x\,dx$

D. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x^2+1+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x^3}\,dx$

E. $\displaystyle\int_{30}^\infty \frac{x\sqrt{x}+x}{1-x^3}\,dx$

F. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$

Exercise 3. Does the area between the curves $y=1$ och $y=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3}$, for $0\le x<\infty$, have finite area?

Exercise 4. Derive the formulas for solids of revolution around the $x-$ and y-axis respectively and compute the volume of the solid of revolution that is generated by $y=x^3$ on the interval $0\le x\le 1$ A. around the x-axis

B. around the y-axis

Exercise 5. Derive the following formulas

A. The volume V of a ball of radius r is given by $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

B. The volume V of a cone with radius r and height h is given by $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

Exercise 6. Derive the formula $A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ for the area A of a cone with radius r and height h (let $y = rx/h$ on the interval $0 \leq x \leq h$ rotate around the x-axis).

Exercise 7. Compute the length of the curve $y = \ln(1 - x^2),\ \ 0 \leq x \leq 0.5$.

Exercise 8. A cylindrical silo with radius 2 meter and height 6 meter is packed. The density ρ of the content varies with the distance h to the bottom according to

$$\rho(h) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{2}}} \quad \text{ton/m}^3.$$

Compute the mass of the contents of the silo.

Exercise 9. A vehicle starts from rest and drives 30 minuter straight ahead with the acceleration $2+60t$ km/h^2. What is the speed after 30 minutes? How far has it travelled?

Exercise 10. The force needed to change the length of a certain spring x meter is $F(x) = x/2$ N. What amount of work is needed to change the length of the spring by $1/10$ meter?

Exercise 11. We shall compute the center of mass of a half disc. Let the half disc be given by

$$x^2 + y^2 \leq R^2, \qquad y \geq 0.$$

For symmetry reasons the x-coordinate of the center of mass must be 0. Compute the y-coordinate. Hint: you may look up the formula in the book.

Exercise 12. Compute the integral $\displaystyle\int \frac{dt}{\sin t}$ using $x = \tan(t/2)$. Hint: with this substitution you get

$$\cos t = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \quad \sin t = \frac{2x}{1 + x^2}, \quad dt = \frac{2dx}{1 + x^2}.$$

(Can you compute the integral some other way?)

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. A. Obegränsat intervall. $\pi/2$
1. B. Integranden obegränsad när $x \to 1$. $\pi/2$
1. C. Obegränsat intervall. 1
1. D. Integranden obegränsad när $x \to 1$. 2
1. E. Obegränat intervall. 2

2. A. Konvergent
2. B. Divergent
2. C. Divergent
2. D. Divergent
2. E. Konvergent
2. F. Divergent

3. Arean är $\frac{\ln 3}{2}$

4. A. $\pi/7$
4. B. $2\pi/5$

5.

6.

7.

8. 16π ton

9. Sluthastigheten är 8.5 km/h och fordonet hinner1.5 km.

10. Svar: $1/400$ Nm. Lösning: Arbete är kraft gånger väg, om kraften är konstant och i vägens riktning. Problemet här är att kraften inte är konstant. Då får man göra så här: Dela in intervallet från 0 till $1/10$ i många små delintervall. På ett litet sådant delintervall av längd Δx vid en punkt x är kraften ungefär konstant (om delintervallet är litet så hinner inte kraften ändra sig så mycket under det lilla intervallet eftersom kraften varierar kontinuerligt). Arbetet för att göra den lilla längdändringen Δx vid punkten x blir därför ungefär $F(x)\Delta x$. Arbetet för att göra hela längdändringen blir summan av arbetena på alla dessa små delintervall, vilket är en Riemannsumma som när delintervallens längd går mot 0 konvergerar mot integralen

$$\int_0^{1/10} F(x)\,dx = \int_0^{1/10} \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{400} \text{ Nm}$$

som alltså är det arbete som krävs för att längdändra fjädern 0.1 meter.

Ibland skriver man i tillämpningar ovanstående resonemang betydligt mer kortfattat ungefär så här:

Arbetet för att göra en liten längdändring dx vid punkten x är $F(x)\,dx$. Hela arbetet fås genom summation till

$$\int_0^{1/10} F(x)\,dx = \int_0^{1/10} \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{400} \text{ Nm}$$

som alltså är det arbete som krävs för att längdändra fjädern 0.1 meter.

11. $\dfrac{4R}{3\pi}$

12. $\ln\tan\dfrac{t}{2} + C$, med C godt konstant. Ja.