



Uppgifter till Seminarium 6

Se www.kth.se/social/course/SF1625 för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna. **Detta seminarium inleds med ett skriftligt prov.** På provet får du lösa en uppgift som liknar någon av seminarieuppgifterna nedan eller någon av de rekommenderade uppgifterna ur kursboken Calculus av Adams och Essex (8:e upplagan). De rekommenderade uppgifterna ur Calculus är

Kapitel 6.3: uppg 1, 3, 9. Kapitel 6.5: uppg 1, 3, 5, 15, 23, 33, 34, 35. Kapitel 7.1: uppg 1, 3, 5, 13, 19, 21. Kapitel 7.2: uppg 1, 3. Kapitel 7.3: uppg 3, 11, 21. Kapitel 7.4: uppg 1, 3, 5. Kapitel 7.6: uppg 1, 7. Kapitel 7.7: uppg 1, 5.

SEMINARIEUPPGIFTER

Uppgift 1. Ange på vilket sätt nedanstående integraler är generaliserade och beräkna dem.

A. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$

B. $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$

C. $\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^{5/2}} dx$

D. $\int_0^\infty x e^{-x} dx$

Uppgift 2. Avgör om nedanstående generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta. Du behöver inte beräkna dem.

A. $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{2-x}} dx,$

B. $\int_1^\infty \frac{1+x+\ln x}{1+e^x} dx$

Uppgift 3. Beräkna integralen $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ (använd t ex $x = \sin t$ — om du inte kommer på något lättare sätt....?)

Uppgift 4. Beräkna integralen $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$ (börja med att sätta $\ln x = t$)

Uppgift 5. Beräkna integralen $\int_0^{1/2} \arcsin x dx$ (börja med partiell integration)

Uppgift 6. Beräkna integralen $\int_0^1 \arctan x dx$ (börja med partiell integration)

Uppgift 7. Beräkna integralen $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-5x+6} dx$ (använd partialbråksuppdelning)

Uppgift 8. Beräkna volymen av den kropp som genereras när området mellan x -axeln och kurvan $y = e^{-x}$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ roteras runt

- A. x -axeln
- B. y -axeln

Uppgift 9. Beräkna volymen av den kropp som genereras när området mellan x -axeln och kurvan $y = e^{-x^2}$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ roteras runt y -axeln.

Uppgift 10. Beräkna längden av kurvan $y = \ln(1-x^2)$, $0 \leq x \leq 0.5$.

Uppgift 11. För en viss fjäder gäller att kraften som krävs för att trycka ihop fjädern x meter är $x/4$ N. Hur stort arbete krävs för att trycka ihop fjädern $1/5$ meter?

DISKUSSIONSUPPGIFTER

Här är några extra uppgifter att diskutera vid seminariet. Lösningar behöver inte skrivas ner i förväg.

- Ge exempel på en funktion som är inte integrerbar och förklara varför.
- Funktionen $f(x) = e^{x^2}$ är kontinuerlig på hela det slutna intervallet $[0, 1]$ och är därför integrerbar där (se sats 2 i kapitel 5.3). Ändå går det inte att på vanligt sätt skriva upp en primitiv funktion till den. Finns det någon motsägelse här?

- Ett klot med radie r har sin medelpunkt på ytan av ett klot med radie R , där $R > r$. Beräkna volymen av den del av det mindre klotet som befinner sig inuti det större. (Använd rotationsvolymsteknik)
- Konvergerar eller divergerar integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx$?
- Beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}e^n} \int_n^{n+1} \sqrt{x}e^x dx$