Tentamen, SF1629, Differentialekvationer och Transformer II (del 1)
24 oktober 2014 kl 8:00 - 13:00.

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonus från kontrollskrivningen gäller uppgift (1).
Preliminära betygsgränser: 14 poäng ger garanterat betyg E, 17 poäng ger garanterat betyg D, 21 poäng ger garanterat betyg C, 24 poäng ger garanterat betyg B och 28 poäng ger garanterat betyg A. Den som har 13 poäng får betyg Fx och har möjlighet att komplettera. Kontakta i så fall examinatorn.
Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen *Mathematics Handbook* av Råde och Westergren.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och väl motiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

(1) Betrakta differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = y(2-y) - \alpha$$

där talet α är en parameter.

a) Bestäm de kritiska punkterna samt rita faslinjen i fallen då $\alpha = 0$, $\alpha = 1/2$ och $\alpha = 1$. **(2p)**

b) Låt $\alpha = 1$. Bestäm explicit de tre lösningar till ekvationen som uppfyller $y(0) = 2$, $y(0) = 1$ respektive $y(0) = 0$. Vilka av dessa är begränsade för alla $t > 0$? **(2p)**

(2) Betrakta det autonoma systemet

$$\frac{dx}{dt} = x - y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - y.$$

a) Bestäm den lösning som uppfyller $x(0) = 1,\ y(0) = 2$. **(3p)**

b) Verifiera, genom insättning i ekvationen, att lösningen som erhållits i a) verkligen är en lösning. **(1p)**

(3) a) Lös begynnelsevärdesproblemet **(3p)**

$$x^2y''(x) - 2y(x) = x^2; \quad y(1) = 3,\ y'(1) = 1/3.$$

b) Bestäm ett intervall där lösningen ovan säkert är unik. **(1p)**

(4) a) Bestäm en serielösning till begynnelsevärdesproblemet **(3p)**

$$y''(x) + xy'(x) + 2y(x) = 0; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

b) För vilka x konvergerar serien? **(1p)**

Vänd!

(5) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y''(t) = \int_0^t (t-u)y(u)du, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 4.$$

(6) Låt $f(x)$ vara en kontinuerlig funktion sådan att $f(0) = 0$ och $xf(x) > 0$ för alla $x \neq 0$, och låt $g(x)$ vara en kontinuerlig funktion sådan att $g(x) \geq 0$ för alla x. Betrakta differentialekvationen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(x)\frac{dx}{dt} + f(x) = 0.$$

Skriv om ekvationen som ett system av ekvationer av första ordningen. Avgör om den kritiska punkten till detta system är stabil eller instabil. (Tips: en funktion på formen $V(x,y) = ay^2 + b\int_0^x f(u)du$ kan vara till hjälp.)

(7) Låt y_1 och y_2 vara de lösningar till ekvationen

$$y''(x) + (\cos x)y'(x) + (\sin x)y(x) = 0$$

som uppfyller $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ respektive $y_2(0) = 1, y_2'(0) = 2$. Bestäm för varje reellt tal x Wronskideterminanten $W(y_1, y_2)(x)$.

(8) Betrakta ekvationen

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$$

där funktionerna p och q är kontinuerliga på $\mathbb{R}$. Antag att y_1, y_2 är en fundamental lösningsmängd till ekvationen. Visa, genom att använda existens- och entydighetssatsen, att varje lösning $y(t)$ till ekvationen är på formen $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$.

Lycka till!