Tentamen, SF1629, Differentialekvationer och Transformer II (del 2)
13 januari 2015 kl 14:00 - 19:00.

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonus från kontrollskrivningen gäller uppgift (1).
Preliminära betygsgränser: 14 poäng ger garanterat betyg E, 17 poäng ger garanterat betyg D, 21 poäng ger garanterat betyg C, 24 poäng ger garanterat betyg B och 28 poäng ger garanterat betyg A. Den som har 13 poäng får betyg Fx och har möjlighet att komplettera. Kontakta i så fall examinatorn.
Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen *Mathematics Handbook* av Råde och Westergren.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och väl motiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

(1) a) Låt V vara delrummet av $C([0,1])$ som består av alla linjärkombinationer av $u_1(x) = 1$ och $u_2(x) = \sqrt{x}$. Bestäm en ortogonal bas för V med avseende på den inre produkten **(1p)**

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

b) För vilka värden på konstanterna a och b blir integralen

$$\int_0^1 |a + b\sqrt{x} - x|^2 dx$$

så liten som möjligt? **(3p)**

(2) Bestäm a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, om $a_0 = 0$ och

$$a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{n-k} = 1, \quad n \geq 0.$$

(3) Bestäm en 2π-periodisk reell funktion $f(t)$ som uppfyller

$$f(t + \pi/4) - f(t) = 2\cos t.$$

(Tips: tänk på Eulers formler.)

(4) a) Låt $f(t) = \sin|t|$. Beräkna f' and f'' i distributionsmening. **(2p)**

b) Definiera $\delta \in \mathcal{S}'$ genom $\delta[\varphi] = \varphi(0)$, och låt $g(x) = -x$. Använd derivatans detinition, samt definitionen av produkt, för att visa att $g\delta' = \delta$. **(2p)**

Vänd!

(5) Låt

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| < \pi \\ 0, & |t| \geq \pi. \end{cases}$$

a) Använd Fouriertransformens definition för att bestämma $\widehat{f}(\omega)$. Förkorta svaret så långt som möjligt. **(2p)**

b) För varje värde på $t \in \mathbb{R}$, bestäm gränsvärdet $\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$ **(1p)**

c) Använd resultatet från a) för att beräkna **(1p)**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi x}{(x^2-1)^2}dx.$$

(6) Låt $f \in L^1(\mathbb{R})$ vara sådan att f' är kontinuerlig och $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Bestäm en funktion g som uppfyller

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{y-t}g(y)dy + f'(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(7) Centralt för Strum-Liouville-problem är att man har att göra med symmetriska operatorer. Låt V vara ett inre produktrum, och antag att $A : V \to V$ är en symmetrisk operator.

a) Visa att om λ är ett egenvärde till operatorn A så måste λ vara reellt. **(2p)**

b) Visa att egenvektorer som hör till olika egenvärden är ortogonala. **(2p)**

(8) a) Antag att $f \in C^2(\mathbb{T})$ (f är 2π-periodisk och två gånger kontinuerligt deriverbar). Låt c_n beteckna f:s (komplexa) Fourierkoefficienter. Visa att det finns en konstant $M > 0$ sådan att

$$|c_n| \leq \frac{M}{|n|^2} \text{ för alla } n \neq 0.$$

Visa också att $n^2c_n \to 0$ då $n \to \pm\infty$. **(2p)**

b) Bestäm alla $f \in C(\mathbb{T})$ som uppfyller $f(2t) = f(t)$ för alla t. **(2p)**

Lycka till!