Tentamen, SF1629, Differentialekvationer och Transformer II (del 2)
8 april 2015 kl 14:00 - 19:00.

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonus från kontrollskrivningen gäller uppgift (1).
Preliminära betygsgränser: 14 poäng ger garanterat betyg E, 17 poäng ger garanterat betyg D, 21 poäng ger garanterat betyg C, 24 poäng ger garanterat betyg B och 28 poäng ger garanterat betyg A. Den som har 13 poäng får betyg Fx och har möjlighet att komplettera. Kontakta i så fall examinatorn.
Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen *Mathematics Handbook* av Råde och Westergren.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och väl motiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

(1) Låt $\varphi(x) = ax + bx^2$. Bestäm konstanterna a, b så att integralen
$$\int_0^1 |1 - \varphi(x)|^2 dx$$
blir så liten som möjligt.

(2) a) Låt $f(x) = \begin{cases} x-1, & x<1 \\ x^2, & x>1 \end{cases}$. Bestäm $f'(x)$ i distributionsmening. Förenkla ditt svar så långt som möjligt. **(2p)**

b) Funktionen
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ 1, & 1<x<2 \\ 0, & 2<x<3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$$
definierar en distribution $T \in \mathcal{S}'$ (på det "vanliga" sättet). Använd definitionen av (distributions)derivata för att beräkna T'. **(2p)**

(3) Bestäm ett fullständigt (complete) ortogonalt system i $L^2(0,\pi)$ bestående av lösningar till randvärdesproblemet
$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad u(0) = 0,\ u'(\pi) = 0.$$
Motivera ditt svar ordentligt.

(4) En funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ kallas bandbegränsad om dess Fouriertransform är 0 utanför något ändligt intervall. Visa att om $\widehat{f}(\omega) = 0$ då $|\omega| > W$ så gäller
$$f(t) * \frac{\sin \Omega t}{\pi t} = f(t)$$
för alla $\Omega > W$. (Vi antar att f är kontinuerligt deriverbar.)

Vänd!

(5) Lös problemet

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0; \\ u(0,t) &= 0,\ u(\pi,t) = 1, \quad t > 0; \\ u(x,0) &= 0, \quad 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

(6) Antag att $f \in L^1(\mathbb{R})$ och låt

$$g(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} f(\tau)d\tau,$$

där $T > 0$ är en given konstant. Visa att $|\widehat{g}(\omega)| \leq |\widehat{f}(\omega)|$ och att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

(Tips: tänk på faltning.)

(7) Låt

$$h(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

och definiera

$$h_t(x) = th(tx), \quad t > 0.$$

Undersök vilka av följande gränsvärden som existerar, och beräkna dem i förkommande fall:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-1}^{1} h_t(x)e^{x^2}dx;$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-1}^{1} h_t(x)\sin\left(\sqrt{|x|} + \frac{1}{t}\right)dx.$$

Motivera alla steg i analysen noga.

(8) Låt $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara en ON-mängd i ett inre produktrum V.

a) Låt u vara en vektor i V och låt $c_1 = \langle u, \varphi_1\rangle$. Visa att **(1p)**

$$\|u - c_1\varphi_1\|^2 = \|u\|^2 - |c_1|^2.$$

b) Resultatet i a) är ett specialfall av följande sats (som ej behöver bevisas): om $u \in V$, $c_k = \langle u, \varphi_k\rangle$ och Φ är en linjärkombination $\Phi = \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k$ så gäller

$$\|u - \Phi\|^2 = \|u\|^2 + \sum_{k=1}^{N} |a_k - c_k|^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2.$$

Använd detta resultat för att visa att ON-mängden $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ är fullständig om och endast om **(3p)**

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle u, \varphi_k\rangle|^2 \quad \text{för alla } u \in V.$$

Lycka till!