

Augusti 31, 2015. Föreläsning 1.

Tillämpad linjär algebra

Innehållet:

- linjen  $\mathbb{R}$ , planet  $\mathbb{R}^2$ , rummet  $\mathbb{R}^3$ , och vektor rummet  $\mathbb{R}^n$ .
- Matriser.
- punkter och vektorer i planet, rummet, och  $\mathbb{R}^n$ .

1. **Linjen, planet, rummet, och vektor rummet  $\mathbb{R}^n$ .**

• Ett reell tal kallas också för en skalär. Mängden av alla reella tal betecknas med  $\mathbb{R}$  och kallas för linjen.

- Ett par av reella tal betecknas med  $(a, b)$  eller  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ , där  $a$  och  $b$  är reella tal.

Mängden av alla par av reella tal betecknas med  $\mathbb{R}^2$  och kallas för planet.

- Ett trippel av reella tal betecknas med  $(a, b, c)$  eller  $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ , där  $a$ ,  $b$ , och  $c$  är reella

tal. Mängden av alla trippel av reella tal betecknas med  $\mathbb{R}^3$  och kallas för rummet.

- En sekvens av  $n$  reella tal betecknas med  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  eller  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ , där  $x_1, x_2, \dots, x_n$

är reella tal. Mängden av alla  $n$ -sekvenser av reella tal betecknas med  $\mathbb{R}^n$  och kallas för vektor rummet av dimension  $n$ .

2. **Matriser** Följande *tabell* av reella tal kallas för  $n \times k$  matris ( $n$  är antalet av rader och  $k$  är antalet av kolonner):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

Till exempel:

- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$  är  $3 \times 1$  matris.
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$  är  $1 \times 3$  matris.
- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$  är  $3 \times 2$  matris.

3. **Punkter och vektorer i planet.** En punkt eller en vektor i planet är bara ett element av planet, dvs ett par av reella tal. Skillnad mellan en punkt och en vektor

är geometrisk föreställning. Vi föreställer en opunkt  $(a, b)$  i  $\mathbb{R}^2$  som en prick eller litet kors i planet med koordinaterna  $(a, b)$ . Punkten med koordinaterna  $(0, 0)$  kallas för origo och betecknas med  $O$ .

Vi tänker om en vektor  $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  som en riktad sträck mellan origo  $(0, 0)$  och punkten med koordinaterna  $(a, b)$ . Vektor  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  kallas för noll vektor i planet och ofta betecknas med  $\vec{0}$ .

Vi också använder följande notation:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och kallar  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  för standardbasen i  $\mathbb{R}^2$ .

**4. Punkter och vektorer i rummet.** Liknade i rummet. En punkt eller en vektor i rummet är bara ett element av rummet, dvs ett trippel av reella tal. Skillnad mellan en punkt  $A = (a, b, c)$  och en vektor  $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$  är geometrisk föreställning.

Vi tänker om en punkt som en punkt i  $\mathbb{R}^3$  och föreställer den som en prick eller litet kors i rummet med koordinaterna  $(a, b, c)$ . Punkten med koordinaterna  $(0, 0, 0)$  kallas för origo och betecknas med  $O$ .

Vi tänker om en vektor  $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$  som en riktad sträck mellan origo  $(0, 0, 0)$  och punkten med koordinaterna  $(a, b, c)$ . Vektor  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  kallas för noll vektor i rummet och betecknas med  $\vec{0}$ .

Vi också använder följande notation:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och kallar  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  för standardbasen i  $\mathbb{R}^3$ .

**5. Punkter och vektorer i  $\mathbb{R}^n$ .** En punkt eller en vektor i vektor rummet  $\mathbb{R}^n$  är bara ett element i  $\mathbb{R}^n$ , dvs en sekvens av  $n$ -reella tal. En punkt i  $\mathbb{R}^n$  betecknas med  $P = (x_1, \dots, x_n)$ . Punkt  $(0, \dots, 0)$  kallas för origo och betecknas med  $O$ . An vektor i

$\mathbb{R}^n$  betecknas med  $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ . Vektor  $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$  kallas för noll vektor i  $\mathbb{R}^n$  och betecknas med  $\vec{0}$ .

Vi också använder följande notation:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och kallar  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  för standardbasen i  $\mathbb{R}^n$ .

## 6. Operationer med vektorer I. Vad kan vi göra med vektorer?

- Vi kan ta **längden** av en vektor. Längden av  $\vec{v}$ , betecknas med  $\|\vec{v}\|$ . Längden kan beräknas med hjälp av Pythagorean sats som ger:

– i  $\mathbb{R}^2$ . Låt  $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ .  $\|\vec{v}\| := \sqrt{a^2 + b^2}$ . Till exempel  $\left\| \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$ .

– i  $\mathbb{R}^3$ . Låt  $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ .

$\|\vec{v}\| := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ . Till exempel  $\left\| \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$ .

– i  $\mathbb{R}^n$ . Låt  $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ .  $\|\vec{v}\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$ .

En vektor som har längden 1 kallas för **enhetsvektor**. Till exempel  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}$  är enhetsvektorer i planet, och  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$  är enhetsvektorer i rummet.

Noll vektorn har längden 0.

- Vi kan multiplicera en vektor med ett reell tal. Låt  $\lambda$  vara ett reell tal.

$$\begin{aligned}
 - \text{i } \mathbb{R}^2. \quad \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}. \\
 - \text{i } \mathbb{R}^3. \quad \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{bmatrix}. \\
 - \text{i } \mathbb{R}^n. \quad \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Till exempel, } 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Märka också att  $0\vec{w} = \vec{0}$ .

Märka att om  $\vec{v} \neq 0$ , då  $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$  är en enhetsvektor (vektor av längden 1).

Hur kan vi föreställa vektor  $-\vec{v}$ ? Rita vektor  $\vec{v}$ . Vektor  $-\vec{v}$  är den vektor som ligger på samma linjen som  $\vec{v}$ , har samma längden som  $\vec{v}$  men har motsatt riktning.

- Två vektorer  $\vec{v}$  och  $\vec{w}$  kallas för **parallella** om det finns ett skalär  $\lambda$  så att  $\lambda\vec{v} = \vec{w}$ .

7. **Uppgift.** • Undersöka om vektorer  $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$  och  $\begin{bmatrix} -8 \\ 16 \end{bmatrix}$  i  $\mathbb{R}^2$  är parallella.

- Undersöka om vektorer  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$  och  $\begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$  i  $\mathbb{R}^3$  är parallella.

8. **Uppgift.** Bestäm alla värde på  $a$  so att  $\begin{bmatrix} 2a-1 \\ -3 \end{bmatrix}$  är parallell till  $\begin{bmatrix} 4 \\ 18 \end{bmatrix}$ .

## 9. Operationer med vektorer II.

- Vi kan addera två vektorer.

- i  $\mathbb{R}^2$ . Låt  $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$  och  $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ . Då  $\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix}$ . Vi kan föreställa vektor  $\vec{v} + \vec{w}$  på följande sätt. Rita parallelogram med vektorer  $\vec{v}$  och  $\vec{w}$  som två sidor. Då  $v + w$  är diagonalen av den parallelogram.

- i  $\mathbb{R}^3$ . Låt  $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$  och  $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$ . Då  $\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{bmatrix}$ .

Vi har samma geometriska föreställning av vektor addition i rummet. Rita parallelogram med vektorer  $\vec{v}$  och  $\vec{w}$  som två sidor. Då  $\vec{v} + \vec{w}$  är diagonalen av den parallelogram.

$$- \text{ i } \mathbb{R}^n. \quad \text{Låt } \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \text{ och } \vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}. \quad \text{Då } \vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{bmatrix}.$$

- Vi kan subtrahera två vektorer.

$$- \text{ i } \mathbb{R}^2. \quad \text{Låt } \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \quad \text{Då } \vec{v} - \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{bmatrix}.$$

$$- \text{ i } \mathbb{R}^3. \quad \text{Låt } \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}. \quad \text{Då } \vec{v} - \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \\ v_3 - w_3 \end{bmatrix}.$$

$$- \text{ i } \mathbb{R}^n. \quad \text{Låt } \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \text{ och } \vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}. \quad \text{Då } \vec{v} - \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \\ \vdots \\ v_n - w_n \end{bmatrix}.$$

Hur kan vi föreställa vektorn  $\vec{v} - \vec{w}$ ? Vi kan göra detta på två sätt:

- Hitta vektor  $-\vec{w}$ . Rita parallelogram med sidorna  $\vec{v}$  och  $-\vec{w}$ . Diagonalen av parallelogrammet föreställer  $\vec{v} - \vec{w}$ .
- Märka att  $(\vec{v} - \vec{w}) + \vec{w} = \vec{v}$ . Det betyder att vi kan föreställa  $\vec{v} - \vec{w}$  på följande sätt. Rita parallelogram med en sida  $\vec{w}$  och diagonalen  $\vec{v}$ . Den andra sidan av parallelogrammet föreställer  $\vec{v} - \vec{w}$ .

**10. Proposition.** Längden har följande egenskaper:

- $\|\vec{v}\| \geq 0$  och  $\|\vec{v}\| = 0$  om och endast om  $\vec{v} = \vec{0}$ .
- $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\|\vec{v}\|$ .
- $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ .

$$\text{Till exempel, } \left\| -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\| = 2 \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\| = 2\sqrt{1+4+9} = 2\sqrt{14}.$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\| + \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{1+4+9} + \sqrt{1+16} = \sqrt{14} + \sqrt{17}$$

Altså:

$$\sqrt{53} \leq \sqrt{14} + \sqrt{17}$$

11. Låt  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  vara vektorer och  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  vara reella tal. Uttryck:

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$$

kallas för en **linjär kombination** av vektorer  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  med koefficienter  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

12. **Uppgift.** Bestäm linear kombination av  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$  med koefficienterna  $-1$ ,  $0.5$ , och  $1/3$ .

13. **Uppgift.** Är det sant att alla vektorer i  $\mathbb{R}^3$  kan skrivas som linear kombination av vektorer  $e_1, e_2$ , och  $e_3$  i den standardbasen av  $\mathbb{R}^3$ ?

14. **Operationer med punkter.** Vad kan vi göra med punkter?

- **Vektorn mellan två punkter.** Om  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  och  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  är punkter i  $\mathbb{R}^n$ , kan vi bygga en vektor  $\vec{PQ}$  som har koordinaterna  $\vec{PQ} = \begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{bmatrix}$ . Ibland föreställer vi vektorn  $\vec{PQ}$  som en riktad sträck som börjar

i  $P$  och slutar i  $Q$ . Vi säger att  $\vec{PQ}$  är vektorn från  $P$  till  $Q$ .

Märka att  $\vec{PQ} = -\vec{QP}$ .

VIKTIG: vi kan inte addera eller subtrahera punkter, eller multiplicera en punkt med ett tal. Vi kan bra ta vektor från en punkt till en annan punkt.

- **Vi kan beräkna avståndet mellan två punkter.** Avståndet mellan punkter  $P$  och  $Q$  är definierat som längden av vektor  $\vec{QP}$ . Till exempel avståndet mellan  $(2, 4)$  och  $(-1, 3)$  är  $\sqrt{(-1 - 2)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{10}$ .

15. **Uppgift.** Hitta koordinaterna av vektor från punkt  $(1, 0, -1)$  till  $(0, -2, -5)$  och beräkna avståndet mellan punkterna.

16. **Operationer med punkter och vektorer.**

- **Vi kan addera en vektor till en punkt och få en punkt.**

– i  $\mathbb{R}^2$ . Låt  $P = (p_1, p_2)$  vara en punkt och  $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$  vara en vektor i planet.

Vi definierar  $P + \vec{v}$  som en punkt i planet med koordinaterna:

$$P + \vec{v} := (p_1 + v_1, p_2 + v_2).$$

Vi kan föreställa punkten  $P + \vec{v}$  på följande sätt: flytta punkten  $P$  i riktning av vektor  $\vec{v}$ .

Till exempel om  $P = (1, -3)$  och  $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$  då  $P + \vec{v}$  är en punkt som har koordinaterna  $P + \vec{v} = (-1, 1)$

– i  $\mathbb{R}^3$ . Likadana i rummet. Låt  $P = (p_1, p_2, p_3)$  vara en punkt och  $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$  vara en vektor i rummet. Vi definierar  $P + \vec{v}$  som en punkt i rummet med koordinaterna:

$$P + \vec{v} := (p_1 + v_1, p_2 + v_2, p_3 + v_3).$$

Vi kan föreställa punkten  $P + \vec{v}$  på följande sätt: flytta punkten  $P$  i riktning av vektor  $\vec{v}$ .

– i  $\mathbb{R}^n$ . Låt  $P = (p_1, \dots, p_n)$  vara en punkt och  $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$  vara en vektor i

$\mathbb{R}^n$ . Vi definierar  $P + \vec{v}$  som en punkt i  $\mathbb{R}^n$  med koordinaterna:

$$P + \vec{v} = (p_1 + v_1, \dots, p_n + v_n).$$

Märka att  $P + \vec{PQ} = Q$ .