Institutionen för Matematik

SF1625
Envariabelanalys
Läsåret 2015/2016

Modul 1: Funktioner, Gränsvärde, Kontinuitet

Denna modul omfattar kapitel P och kapitel 1 kursboken Calculus av Adams och Essex och undervisas på tre föreläsningar, två övningar och ett seminarium.

Viktiga begrepp. De tre huvudbegreppen i denna modul är **funktion**, **gränsvärde** och **kontinuitet**. Lägg noga märke till vad de betyder, dvs hur de definieras. Till funktionsbegreppet finns en rad andra termer och begrepp som man måste behärska. De viktigaste är *definitionsmängd, värdemängd, funktionsgraf, tangent och normal till funktionsgraf, begränsad funktion, udda resp jämn funktion, styckvis definierad funktion, sammansättning av funktioner, absolutbeloppsfunktionen*. Dessa begrepp ska man både kunna definiera matematiskt och använda i problemlösning.

När det gäller **gränsvärde** så är det viktigt att förstå att gränsvärdesdefinitionen är till för att på ett precist sätt formulera vad begreppet gränsvärde betyder. Man använder sällan själva definitionen för att beräkna gränsvärden – till detta har man andra metoder.

När det gäller **kontinuitet** så är det viktigt att komma fram till insikten att det finns en stor klass av funktioner, ofta kallade **elementära funktioner**, som är kontinuerliga i alla punkter i sina definitionsmängder. Det betyder att för dessa funktioner får man gränsvärdet i en punkt genom att räkna ut funktionsvärdet i punkten. Det är bara i punkter där dessa funktioner inte är definierade som gränsvärdet är ett problem som måste undersökas på något mer avancerat sätt. De elementera funktionerna är *polynom, rationella funktioner, potensfunktioner, exponentialfunktioner, logaritmfunktioner, trigonometriska funktioner, inversa trigonometriska funktioner – och alla kombinationer av dessa med hjälp av de fyra räknesätten och sammansättning.*

För **kontinuerliga funktioner** definierade på **slutna och begränsade intervall** finns ett par viktiga satser, som säger att sådana funktioner alltid antar ett största och ett minsta värde och att om de tar två värden så tar de också alla värden däremellan.

Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus. Kapitel P1: 7, 11, 19, 29, 39. Kapitel P2: 13, 15, 17, 23. Kapitel P3: 3, 7, 43, 49. Kapitel P4: 1, 3, 7, 11, 31, 33, 53. Kapitel P5: 9, 25. Kapitel P6: 1, 7, 17. Kapitel P7: 1, 3, 7, 19, 25, 26, 51. Kapitel 1.2: uppg 9, 13, 21, 25, 30, 49, 50, 78, 79. Kapitel 1.3: uppg 3, 6, 11, 13, 53. Kapitel 1.4: uppg 7, 8, 12, 15, 17, 20, 21, 29. Kapitel 1.5: uppg 13, 29.

KAN DU DET HÄR TILLRÄCKLIGT BRA? TESTA DIG SJÄLV!

Uppgift 1. Denna uppgift handlar om räta linjer.

A. Ange en ekvation för den linje genom $(5, -1)$ som har riktningskoefficient -2.
B. Ange en ekvation för den räta linje som går genom punkterna $(1, -3)$ och $(-2, 5)$.
C. Avgör om linjerna med ekv $8x + 16y + 5 = 0$ och $x = -2y + 33$ är parallella.
D. Avgör om linjerna med ekv $8x + 9y + 5 = 0$ och $9x - 8y + 15 = 0$ är vinkelräta.
E. Vad säger enpunktsformeln (point-slope equation) för linjens ekvation?

Uppgift 2. Lös nedanstående ekvationer.

A. $\sin 2x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
B. $|2x + 1| = 2$

Uppgift 3. Beräkna nedanstående gränsvärden.

A. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x^2-4}$ B. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

C. $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x-2}{x^2-4}$ D. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x-2}{x^2-4}$

Uppgift 4. Beräkna nedanstående gränsvärden.

A. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x}$
B. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x - \sin x}{x}$

Uppgift 5. Låt $f(x) = \dfrac{5x-1}{\cos 2x}$.

A. Bestäm definitionsmängden till f.
B. I vilka punkter är f kontinuerlig?
C. Avgör om f är udda eller jämn.
D. Är f begränsad?

Uppgift 6. Låt $g(t) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{t+1}}$.

A. Bestäm definitionsmängden till g.
B. I vilka punkter är g kontinuerlig?
C. Avgör om g är udda eller jämn.
D. Är g begränsad?

Uppgift 7. Låt $h(x) = |x| - |x+1|$.

A. Bestäm definitionsmängden till h. I vilka punkter är h kontinuerlig?
B. Skriv h som en styckvis definierad funktion, utan absolutbeloppstecken.
C. Skissa grafen $y = h(x)$ och ange värdemängden till h.
D. Är h begränsad?

Uppgift 8. Betrakta funktionen s given av

$$s(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 0 \\ x+2, & 0 \le x < 2 \\ x^2, & x \ge 2 \end{cases}$$

A. Vad är definitionsmängden till funktionen s ?
B. I vilka punkter är s kontinuerlig?
C. Gör en enkel skiss av funktionskurvan $y = s(x)$.

Uppgift 9. Enhetscirkeln består av alla punkter (x, y) i planet sådana att $x^2 + y^2 = 1$.

A. Är enhetscirkeln funktionsgrafen $y = f(x)$ till någon funktion f ?
Om ja, vilken? Om nej, varför inte?
B. Är övre halvan av enhetscirkeln (dvs den del där $y \ge 0$) funktionsgrafen $y = f(x)$ till någon funktion f ? Om ja, vilken? Om nej, varför inte?

Uppgift 10. Visa med hjälp av satsen om mellanliggande värden att ekvationen

$$x^4 - x^2 - 2x - 1 = 0$$

har minst två olika lösningar i intervallet $-1 < x < 2$.

Uppgift 11. Avgör i vilka punkter funktionen f som ges av

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2t}{t}, & t \ne 0 \\ 2, & t = 0 \end{cases}$$

är kontinuerlig.

Uppgift 12. Förklara hur du kan veta att

$$f(x) = \frac{\sin 47x - \cos^3 x}{x^{23} + 2x + 1}$$

måste anta ett största och ett minsta värde när x varierar i intervallet $0 \le x \le 3$.

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. A. $y + 1 = -2(x - 5)$. Kan också skrivas $y = -2x + 9$
1. B. $y = -\frac{8}{3}x - \frac{1}{3}$
1. C. Ja (ty de har samma riktningskoefficient)
1. D. Ja (ty $k_2 = -1/k_1$, där k_1 och k_2 är riktningskoefficienterna)
1. E. Läs i boken eller i er gymnasiebok (och kika gärna också på svaret till 4A)

2. A. $x = -\pi/8 + n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal, eller $x = 5\pi/8 + n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.
2. B. Lösningarna är $x = 1/2$ och $x = -3/2$

3. A. $1/3$
3. B. $1/4$
3. C. Gränsvärde saknas (det är INTE heller ∞)
3. D. 0

4. A. 0
4. B. 1

5. A. Alla $x \neq \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$, n godtyckligt heltal. Tips: problemet är när nämnaren är noll.
5. B. Alla $x \neq \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$, n godtyckligt heltal.
5. C. f är varken udda eller jämn.
5. D. Nej

6. A. Alla tal som är större än eller lika med 0 och alla tal mindre än -1. Tips: undvik negativt under rottecknet och undvik division med noll.
6. B. Samma svar som i 2A.
6. C. Varken udda eller jämn.
6. D. Nej

7. A. Definitionsmängden är alla reella tal x. Funktionen är kontinuerlig överallt.
7. B. För $x \geq 0$ är $h(x) = -1$.
För x mellan -1 och 0 är $h(x) = -2x - 1$.
För $x \leq -1$ är $h(x) = 1$.
7. C. Det är lätt att rita grafen med hjälp av informationen i B. Värdemängden består av alla tal y sådana att $-1 \leq y \leq 1$
7. D. Ja, $|h(x)| \leq 1$ för alla x

8. A. Alla x
8. B. $x \neq 0$
8. C. Se sidorna 36 och 37 i boken för exempel på denna typ av funktion.

9. A. Nej. För varje x mellan -1 och 1 finns två olika möjliga värden på y.
9. B. Ja. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

10. Funktionen $f(x) = x^4 - x^2 - 2x - 1$ är kontinuerlig överallt och $f(-1) = 1,\ f(0) = -1,\ f(2) = 7$, så det följer av satsen om mellanliggande värden att funktionen har ett nollställe mellan -1 och 0 och ytterligare ett mellan 0 och 2.

11. Funktionen är kontinuerlig i alla punkter på reella axeln.

12. Funktionen är kontinuerlig i varje punkt av det slutna och begränsade intervallet $[0, 3]$. Det följer att största och minsta värde finns, enligt the max-min theorem (sid 83).