



Uppgifter till Seminarium 2

Se www.kth.se/social/course/SF1625 för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna. **Detta seminarium inleds med ett skriftligt prov.** På provet får du lösa en uppgift som liknar någon av seminarieuppgifterna nedan eller någon av de rekommenderade uppgifterna ur kursboken Calculus av Adams och Essex (8:e upplagan). De rekommenderade uppgifterna ur Calculus är

Kapitel 2.1: uppg 5, 7. Kapitel 2.2: uppg 1, 3, 11, 26, 27, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47.
Kapitel 2.3: uppg 1, 7, 11, 17, 25, 33, 35, 47. Kapitel 2.4: uppg 3, 5, 11, 18, 23, 30, 31, 37. Kapitel 2.5: uppg 13, 15, 23, 29, 31, 35, 45, 62. Kapitel 2.6: uppg 3, 9. Kapitel 2.7: uppg 1, 3, 11, 13, 23, 29. Kapitel 2.8: uppg 5, 13, 21, 27. Kapitel 2.9: uppg 3, 9, 13. Kapitel 2.9: uppg 3, 9, 13. Kapitel 2.11: uppg 5, 7, 13, 16, 17, 18, 19.

SEMINARIEUPPGIFTER

Uppgift 1. Derivera följande funktioner med avseende på x och ange för vilka x de är deriverbara. Är det någon av funktionerna som inte är deriverbar i hela sin definitionsmängd?

A. $f(x) = \tan^2 x$

B. $g(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$

C. $h(x) = 2 \sin \sqrt{x}$

D. $k(x) = |x| \cos x$

E. $r(x) = \sqrt{1 + x}$

F. $s(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

Uppgift 2. Låt $g(x) = x^2 \sin x$.

- A. Bestäm definitionsmängden till g .
- B. I vilka punkter är g kontinuerlig?
- C. Bestäm $g'(x)$.
- D. I vilka punkter är g deriverbar?

Uppgift 3. Låt $h(t) = |1 + t|(1 + 2 \sin t)^5$.

- A. Bestäm definitionsmängden till h .
- B. I vilka punkter är h kontinuerlig?
- C. Bestäm $h'(t)$.
- D. I vilka punkter är h deriverbar?

Uppgift 4. Bestäm ekvationer för tangenten och normalen i punkten $(2, 16)$ till kurvan $y = x^4$.

Uppgift 5. På vilka intervall är funktionen $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ strängt växande? Strängt avtagande?

Uppgift 6. Visa med hjälp av derivata att funktionen $f(x) = 2 \sin^2 x + \cos 2x$ är konstant.

Uppgift 7. Betrakta funktionen $f(x) = \sin x^2$. Beräkna $f^{(n)}(0)$ för $n = 1, 2, 3$.

Uppgift 8. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = \tan x$ i den punkt på kurvan som har x -koordinat $\pi/4$. Kan du med hjälp av tangenten hitta ett närmevärde till $\tan(\pi/5)$?

Uppgift 9. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $x^3 + y^3 + y^2 - 4x = 5$ i punkten $(-1, 1)$. Tips: implicit derivering.

Uppgift 10. Teori: Visa med hjälp av derivatans definition att $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$

Uppgift 11. Teori: Bevisa produktregeln!

Uppgift 12. Teori: Bevisa att en funktion som är deriverbar i en punkt a också måste vara kontinuerlig i a . Ge ett exempel som visar att omvändningen inte gäller!

DISKUSSIONSUPPGIFTER

Här är några extra uppgifter att diskutera vid seminariet. Lösningar behöver inte skrivas ner i förväg.

- Ge exempel på en funktion med definitionsmängd \mathbb{R} som varken är kontinuerlig eller deriverbar i $x = 1$.
- Ge exempel på en funktion med definitionsmängd \mathbb{R} som är kontinuerlig men inte deriverbar i $x = 1$.
- Finns det någon funktion som är deriverbar men inte kontinuerlig i $x = 1$?
- Låt $h(x) = |x| - |x + 1|$. Beräkna $h'(x)$ och ange i vilka punkter h är deriverbar. Hur ser grafen ut i de punkter där h inte är deriverbar?
- Låt $U(t)$ vara Heaviside-funktionen som ges av

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } t \geq 0 \\ 0 & \text{om } t < 0 \end{cases}$$

Beräkna $U'(t)$. I vilka punkter är U deriverbar?

- Låt U vara som i föregående uppgift och sätt $f(t) = (U(t - \pi) - U(t - 3\pi)) \sin t$. Gör en enkel skiss av funktionsgrafens $y = f(x)$. I vilka punkter är f kontinuerlig? Beräkna $f'(t)$. I vilka punkter är f deriverbar? Hur ser grafen ut i de punkter där f inte är deriverbar?