KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Bedömningskriterier till tentamen
Torsdagen den 20 augusti 2015

Allmänt gäller följande:

- För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.
- Om lösningen helt saknar förklarande text, eller motsvarande förklaring i form av logiska symboler, till beräkningar och formler ges högst två poäng. Detta markeras vid bedömningen med FTS (Förklarande text saknas).
- Om lösningen har förklarande text men inte tillräckligt för att det ska gå att förstå alla steg ges högst tre poäng sammanlagt på uppgiften. Detta markeras med FLFT (För lite förklarande text).
- Mindre räknefel ger i allmänhet inte avdrag om de inte ändrar uppgiftens karaktär eller leder till orimligheter som borde ha upptäckts.
- Lösningen ska kunna läsas av en person som inte är insatt i problemet i förväg. Bevisbördan ligger på den som skriver, inte på den som läser.

(1) Betrakta funktionen f som är definierad i området där $x + y^2 \neq 0$ genom

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 z}{x + y^2}.$$

(a) Beräkna gradienten $\nabla f(x, y, z)$. **(1 p)**

(b) Bestäm riktningsderivatan av f i punkten $(2, 1, 1)$ i riktning mot punkten $(4, -1, 2)$. **(2 p)**

(c) I vilken riktning växer f snabbast i punkten $(2, 1, 1)$? **(1 p)**

Bedömning:

(a) Korrekt beräkning av gradienten, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt metod för beräkning av riktningsderivatan, **1 poäng**.
- Korrekt beräknad riktningsderivata utifrån beräkningen i del (a), **1 poäng**.

(c) Korrekt motiverad riktning, **1 poäng**.

---

(2) Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}$ som ges av

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(x + \frac{y}{2} + 3, \frac{x}{2} + y + 5\right)$$

för (x, y) i $\mathbb{R}^2$.

(a) Vad innebär det att ett vektorfält är *konservativt*? **(1 p)**

(b) Visa att vektorfältet $\mathbf{F}$ är konservativt. **(1 p)**

(c) Använd vetskapen att vektorfältet är konservativt för att beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \left(x + \frac{y}{2} + 3\right)\, dx + \left(\frac{x}{2} + y + 5\right)\, dy$$

där γ är någon slät kurva som börjar i $(-2, 0)$ och slutar i $(-2, -4)$. **(2 p)**

Bedömning:

(a) Korrekt förklaring av begreppet *konservativt fält*, **1 poäng**.

(b) Korrekt motivering till att fältet är konservativt (Vid kontroll av likheten av derivatorna krävs hänvisning till att området är enkelt sammanhängande.) , **1 poäng**.

(c)
- Korrekt beräkning av potential, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av kurvintegralen med hjälp av potentialen, **1 poäng**.

eller

(c)
- Korrekt enkelintegral utifrån parametrisering av kurva, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av kurvintegralen med hjälp av den parametriserade kurvan, **1 poäng**.

---

(3) Betrakta den homogena kropp K som ges av olikheterna

$$x^2 + y^2 \le z \le 1.$$

För att bestämma masscentrum för K behöver man bland annat beräkna integralen

$$I_z = \iiint_K z\, dxdydz.$$

(a) Hur beräknas masscentrum för K? **(1 p)**

(b) Beräkna integralen I_z. **(3 p)**

Bedömning:

(a) Korrekta integraler för V, I_x och I_y, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt integration i z-led, **1 poäng**.
- Korrekt övergång till polära koordinater, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av I_z, **1 poäng**.

---

(4) Beräkna största och minsta värdet av funktionen $f(x, y) = x^2y$ på området som ges av olikheten $3x^2 + 2y^2 \le 6$. **(4 p)**

Bedömning:
- Korrekt motivering till varför max och min måste finnas, **1 poäng**.
- Korrekt hantering av stationära punkter, **1 poäng**.
- Korrekt ansats i användningen av Lagranges metod för randen, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad slutsats om största och minsta värde, **1 poäng**.

---

(5) De differentierbara funktionerna $f(x, y)$ och $g(r, \theta)$ är relaterade genom

$$g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Vi vet att

$$\frac{\partial g}{\partial r}\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{och} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = 9.$$

Använd kedjeregeln för att beräkna

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, \sqrt{3}) \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1, \sqrt{3}).$$

(Det är användbart att känna till att $\cos(\pi/3) = 1/2$ och $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.) **(4 p)**

Bedömning:
- Korrekt uppställning av kedjeregeln, **1 poäng**.
- Korrekt uppställt ekvationssystem, **1 poäng**.
- Korrekt lösning av ekvationssystem, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad slutsats, **1 poäng**.

---

(6) Betrakta flödet av vektorfältet $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (x + y, y, 2xy + z + 3)$$

upp genom den del av ytan $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför xy-planet.

(a) Parametrisera ytan. **(1 p)**

(b) Ställ upp integralen som beräknar flödet av $\mathbf{v}$ med hjälp av parametriseringen från del (6a). **(2 p)**

(c) Beräkna flödet av $\mathbf{v}$ med hjälp av integralen från del (6b). **(1 p)**

Bedömning:

(a) Korrekt parametrisering av ytan inklusive gränser för parametrarna, **1 poäng**.

- Korrekt beräknad normalvektor , **1 poäng**.
- Korrekt uppställd dubbelintegral utifrån parametriseringen i del (a),

(b) Korrekt beräkning av flödet utfrån dubbelintegralen från del (b), **1 poäng**.

---

(7) Låt funktionen $f(x, y)$ vara definierad för $(x, y) \neq (0, 0)$ genom

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}.$$

Visa att f blir kontinuerlig i origo om vi definierar $f(0, 0) = 0$. **(4 p)**

Bedömning:

- Korrekt idé med polära koordinater, **1 poäng**.
- Korrekt idé med instängning, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd motivering till att gränsvärdet är noll, **2 poäng**.

---

(8) Bestäm den enkla, slutna, kontinuerligt deriverbara kurva C för vilken kraftfältet

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2y + y^3 - 12y, 24x - x^3 - 6xy^2)$$

uträttar det största arbetet, då en partikel förflyttas ett varv moturs längs C. Ange också detta största arbete. **(4 p)**

Bedömning:

- Motivering av metod med Greens formel och omskrivning av kurvintegralen, **1 poäng**.
- Korrekt motivering till att integralen maximeras då den tas över området där integranden är icke-negativ, **1 poäng**.
- Principiellt korrekt integration, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd integration och korrekt svar , **1 poäng**.
