KS 1 SF1661 16/9 2014

SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG

(1.) Vi konstruerar additions- och multiplikationstabellen för talen 1, 2, 3 och 4, uttryckt i bas 5

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	11	13
3	3	11	14	22
4	4	13	22	31

+	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

Vi beräknar nu $(241)_5 \cdot (32)_5$ med hjälp av tabellerna;

$$
\begin{array}{r}
241 \\
\cdot\ 32 \\
\hline
1032 \\
+1323 \\
\hline
14312
\end{array}
$$

så

$$(241)_5 \cdot (32)_5 = (14312)_5$$

1. forts.

Vi omvandlar nu produkten till bas 10

$$(14312)_5 = 1 \cdot 5^4 + 4 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0$$
$$= (625 + 500 + 75 + 5 + 2)_{10}$$
$$= (1207)_{10}$$

Kontroll

$$(241)_5 = 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 50 + 20 + 1 = (71)_{10}$$

$$(32)_5 = 3 \cdot 5 + 2 = (17)_{10}$$

$$(241)_5 \cdot (32)_5 = (71)_{10} \cdot (17)_{10} = (1207)_{10}$$

$$\begin{array}{r} 71 \\ 17 \\ \hline 497 \\ 71 \\ \hline 1207 \end{array}$$

SVAR: $(14312)_5 = (1207)_{10}$

(2) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} : x < 4\}$

a) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \text{ eller } x < 4\}$

$= (-\infty, 4) \cup [1, \infty) = \mathbb{R}$

b) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \text{ och } x < 4\}$

$= [1, 4)$

c) $A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \text{ och } x \not< 4\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \text{ och } x \geq 4\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 4\} = [4, \infty)$

d) $A^c = \{x \in \mathbb{R} : x \notin A\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x < 1\} = (-\infty, -1)$

SVAR: a) $\mathbb{R}$ b) $[1,4)$ c) $[4,\infty)$ d) $(-\infty,-1)$

③ a) Nej, inget $r \in \mathbb{Q}$ uppfyller $r^2 = 3$

b) <u>Bevis:</u> Antag motsatsen, dvs att det finns ett rationellt tal r sådant att $r^2 = 3$.

r kan, eftersom $r \in \mathbb{Q}$, skrivas som

$$r = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q \neq 0$$

och där vi kan anta att p och q förkortats så långt som möjligt.

Då är $r^2 = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2 = 3q^2$.

I sista ekvationen gäller att $3 \mid H.L. \Rightarrow 3 \mid V.L.$
$\Rightarrow 3 \mid p^2 \Rightarrow 3 \mid p$ (eftersom 3 är ett primtal).

Alltså är $p = 3k$ för något $k \in \mathbb{Z}$ och vi får $(3k)^2 = 3q^2 \Leftrightarrow 3k^2 = q^2$.
Här ser vi att $3 \mid V.L. \Rightarrow 3 \mid H.L. = q^2$
$\Rightarrow 3 \mid q$, alltså är $q = 3m$, ngt $m \in \mathbb{Z}$.

Så $\frac{p}{q} = \frac{3k}{3m}$, vilket <u>MOTSÄGER</u> $\frac{p}{q}$ var förkortat så långt som möjligt.

<u>Eftersom</u> vi har en motsägelse är vårt antagande felaktigt, alltså finns inget tal $r \in \mathbb{Q}$ sådant att $r^2 = 3$.