Institutionen för Matematik

SF1625
Envariabelanalys
Läsåret 2015/2016

Modul 3
Invers, exp, log, arc och ODE

Denna modul omfattar kapitel 3 och avsnitt 18.6 i kursboken Calculus av Adams och Essex och undervisas på tre föreläsningar, två övningar och ett seminarium.

Viktiga begrepp. I denna modul introduceras begreppet **invers** funktion och som exempel på det några nya klasser av funktioner: **exponentialfunktioner**, **logaritmfunktioner** och **inversa trigonometriska funktioner**. Dessutom introduceras en viss sorts **differentialekvationer**, nämligen linjära ordinära differentialekvationer med konstanta koefficienter. Dessa är väldigt enkla (jämfört med många andra typer av differentialekvationer) men har ändå många viktiga tillämpningar.

Det är viktigt att du lär dig de grundläggande egenskaperna hos de funktioner du möter i det här kapitlet. Du måste behärska **potenslagar** och **loglagar** riktigt bra. Samma sak gäller för egenskaperna hos **arcus**-funktionerna. Du måste också bli bra på att **derivera** dessa funktioner och mer komplicerade funktioner där dessa ingår. Samt förstås bli bra på att använda derivatan för att dra slutsatser om funktionen.

Det finns en del terminologi i anslutning till differentialekvationerna som det är bra att lära sig, med ord som **ordning, linjär, homogen, initialvärdesproblem** och **karaktäristisk ekvation**.

Differentialekvationerna i detta kapitel kan lösas med en speciell metodik och det är viktigt att man lär sig den. Med hjälp av karaktäristiska ekvationen hittar man den allmänna **homogena lösningen** y_h (om ordningen är 2 finns tre olika fall). Med hjälp av ansättning hittar man sedan någon **partikulärlösning** y_p (om diffekvationen är homogen behövs inte detta steg). Sedan får man lösningen genom att **addera** $y_h + y_p = y$. Om initialvillkor är givna så använder man dem för att **bestämma konstanterna** i lösningen y. Ett intressant fenomen är **resonans**. Missa inte det!

Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus. Kapitel 3.1: 3, 9, 23. Kapitel 3.2: 3, 5, 9, 15, 25, 29. Kapitel 3.3: 3, 5, 7, 9, 19, 21, 31, 33, 43, 51, 59. Kapitel 3.4: 1, 3, 5, 9, 11, 17, 23, 25. Kapitel 3.5: 1, 3, 5, 7, 13, 19, 21, 23, 35. Kapitel 3.7: 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 29. Kapitel 18.6: 1, 3, 5, 7.

KAN DU DET HÄR TILLRÄCKLIGT BRA? TESTA DIG SJÄLV!

Uppgift 1. Låt $f(x) = \dfrac{e^{kx}}{1+e^{kx}}$.

A. Bestäm definitionsmängden till f.
B. I vilka punkter är f kontinuerlig?
C. Bestäm $f'(x)$.
D. I vilka punkter är f deriverbar?

Uppgift 2. Låt $g(x) = x \ln x - x$.

A. Bestäm definitionsmängden till g.
B. I vilka punkter är g kontinuerlig?
C. Bestäm $g'(x)$.
D. I vilka punkter är g deriverbar?

Uppgift 3. Låt $h(t) = \arctan t + \arctan \frac{1}{t}$.

A. Bestäm definitionsmängden till h.
B. I vilka punkter är h kontinuerlig?
C. Bestäm $h'(t)$.
D. I vilka punkter är h deriverbar?
E. Rita funktionsgrafen $y = h(t)$.

Uppgift 4. Derivera nedanstående uttryck med avseende på x och ange i vilka punkter derivatan existerar.

A. xe^{-x}.

B. xe^{-x^2}.

C. $\ln \sqrt{1+x^2}$.

D. $e^{-|x|}$

E. $e^{2x} \sin 3x$

F. $\arcsin \sqrt{x}$

Uppgift 5. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = \ln x$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat 1. Kan du med hjälp av tangenten ge ett närmevärde till $\ln 1.1$?

Uppgift 6. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = e^{-x^2}$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat -1.

Uppgift 7. På vilka intervall är funktionen $f(x) = xe^{-x^2/2}$ strängt växande?

Uppgift 8. Förenkla nedanstående uttryck så långt som möjligt.
A. $2\ln 6 - \ln 4 - \ln 9$
B. $\ln(e^{2x} \cdot e^{-x})$
C. $\arccos \frac{1}{2}$
D. $\sin(\arccos x)$
E. $\arctan \sqrt{3}$

Uppgift 9. Här är en uppgift om inverser.
A. Bestäm inversen till funktionen $f(x) = 1 + e^{3x}$. Ange också inversens definitionsmängd och värdemängd.
B. Hur kan du med hjälp derivata visa att funktionen $g(x) = x + e^{3x}$ är inverterbar utan att räkna ut inversen?

Uppgift 10. Lös följande differentialekvationer.
A. $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$
B. $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 10$
C. $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0$
D. $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = t + 1$

Uppgift 11. Lös initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 18 \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Uppgift 12. Lös initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin t \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. A. Funktionen är definierad för alla reella tal x
1. B. Funktonen är kontinuerlig överallt.
1. C. $f'(x) = \dfrac{ke^{kx}}{(1+e^{kx})^2}$
1. D. Funktionen är deriverbar överallt.

2. A. Alla $x > 0$
2. B. Samma svar som i 2A.
2. C. $g'(x) = \ln x$
2. D. Samma svar som A och B

3. A. Definitionsmängden är alla reella tal $t \neq 0$.
3. B. Funktionen är kontinuerlig överallt utom i origo.
3. C och D. h är deriverbar överallt utom i origo och för alla $t \neq 0$ gäller att $h'(t) = 0$
3. E. $h(t) = \pi/2$ för alla $t > 0$ och $h(t) = -\pi/2$ för alla $t < 0$. Nu är det lätt att rita grafen.

4. A. $e^{-x}(1-x)$, existerar för alla x
4. B. $e^{-x^2}(1-2x^2)$, existerar för alla x
4. C. $\dfrac{x}{1+x^2}$ definierat för alla x
4. D. $-e^{-x}$ om x är positivt och e^x om x är negativt. Existerar för alla $x \neq 0$
4. E. $2e^{2x}\sin 3x + 3e^{2x}\cos 3x$, existerar för alla x
4. F. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$, existerar när $0 < x < 1$.

5. Tangent: $y = x - 1$. Och $\ln 1.1 \approx 0.1$

6. $y - \dfrac{1}{e} = \dfrac{2}{e}(x+1)$.

7. Funktionen är strängt växande på intervallet $-1 \leq x \leq 1$

8. A. 0
8. B. x
8. C. $\pi/3$
8. D. $\sqrt{1-x^2}$ om $-1 \leq x \leq 1$ (annars är uttrycket inte definierat).
8. E. $\pi/3$

9. A. $f^{-1}(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{3}$. Definitionsmängden för f^{-1} är alla $x > 1$. Värdemängden är alla reella tal.
9. B. Eftersom $g'(x) = 1 + 3e^{3x} > 0$ för alla x så är g strängt växande och därmed inverterbar.

10. A. $y(t) = Ce^t + De^{2t}$, där C och D är godtyckliga konstanter.
10. B. $y(t) = Ce^t + De^{2t} + 5$, där C och D är godtyckliga konstanter.
10. C. $y(t) = e^{2t}(A\cos t + B\sin t)$, där A och B är godtyckliga konstanter.
10. D. $y(t) = e^{2t}(A\cos t + B\sin t) + \dfrac{1}{5}t + \dfrac{9}{25}$, där A och B är godtyckliga konstanter.

11. $y(t) = te^{3t} + 2$

12. $y(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t$