

# Föreläsning 9

## Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg

Avdelningen för reglerteknik  
Skolan för elektro- och systemteknik

29 september 2014



# Tillståndsåterkoppling

Antag att vi återkopplar ett system med hjälp av  $u = -Lx + l_0r$ . Då blir det återkopplade systemet på formen:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ u &= -Lx + l_0r \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x} &= Ax + B(-Lx + l_0r) \\ y &= Cx \end{cases}$$

$$\implies \boxed{\begin{cases} \dot{x} &= (A - BL)x + Bl_0r \\ y &= Cx \end{cases}}$$

Det slutna systemets poler ges av egenvärdena till  $A - BL$ , dvs. rötterna till ekvationen  $\det [sI - (A - BL)] = 0$ .

Vi observerar att

- $A - BL$  har  $n$  stycken egenvärden
- $L$  har  $n$  stycken parametrar

Om systemet är styrbart kan det slutna systemets poler placeras godtyckligt via lämpligt val av  $L$ .

## Exempel

Antag att vi har systemet och återkopplingen

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \\ u &= -\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} x + l_0 r \end{cases}$$

Vi beräknar  $A - BL$  som

$$A - BL = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (l_1 \quad l_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -l_1 & -l_2 \end{pmatrix}$$

## Exempel (fort.)

Egenvärden till  $A - BL$  ges av

$$\det [\lambda I - (A - BL)] = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ l_1 & \lambda + l_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + l_2\lambda + l_1$$

Antag nu att vi t.ex. vill placera polerna i  $-3$  och  $-3$  (dubbelpol).

$$\Rightarrow (\lambda + 3)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9$$

Jämför vi nu med ekvationen ovan ser vi att vi bör välja

$$\begin{cases} l_2 = 6 \\ l_1 = 9 \end{cases} \implies u = -9x_1 - 6x_2 + l_0r$$

## Exempel (fort.)

Detta ger oss det återkopplade systemet

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} l_0 r \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Hade vi istället velat lägga polerna i  $-3000$  och  $-3000$  (ca 1000 gånger snabbare) skulle vi behövt välja

$$\Rightarrow \begin{cases} l_1 &= 9 \cdot 10^6 \\ l_2 &= 6 \cdot 10^3 \end{cases}$$

Vi inser att valet av slutna systemets poler begränsas av storleken på  $u(t)$ .

Hur ska man välja  $l_0$ ?

Så att  $y(t) = r(t)$  i stationärt tillstånd då  $r(t) = \text{konstant}$ , dvs.  
 $G_c(0) = 1$ .

Kom ihåg att  $\dot{x} = 0$  i stationärt tillstånd.

## Exempel (fort.)

Vi hade det återkopplade systemet

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} l_0 r \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

I stationärt tillstånd och med konstant referens har vi

$$\begin{cases} r(t) &= \bar{r} \\ \dot{x} &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = -9x_1 - 6x_2 + l_0 \bar{r} = 0 \end{cases}$$

Som direkt ger  $x_1 = \frac{l_0}{9} \bar{r}$ . Men eftersom  $y = x_1 = \frac{l_0}{9} \bar{r}$  så bör vi välja  $l_0 = 9$  för att  $y = \bar{r}$ .

$$\implies u = -9x_1 - 6x_2 + 9r$$



Svagheten med metoden vi använde ovan för att bestämma  $l_0$  är att den kräver att man känner till  $G(0)$  och att inga störningar påverkar systemet.

⇒ Inför I-reglering.

## Tillståndsåterkoppling:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases} \iff G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

$$u = -Lx + l_0 r \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A - BL)x + Bl_0 r \\ y &= Cx \end{cases} \Rightarrow G_c(s) = \frac{(b_1 s^{n-1} + \dots + b_n)l_0}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n}$$

- Poler:  $\det[sI - (A - BL)] = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$
- - Vi kan påverka slutna systemets poler via  $L$  (optimering)
  - Nollställen ändras ej

## Exempel (Styrbar kanonisk form, s. 133)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u$$
$$y = (b_1 \cdots b_n)x$$

$$\Rightarrow A - BL = \begin{pmatrix} -\overbrace{(a_1 + l_1)}^{\alpha_1} & -\overbrace{(a_2 + l_2)}^{\alpha_2} & \cdots & -\overbrace{(a_n + l_n)}^{\alpha_n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det återkopplade systemet är också på styrbar kanonisk form.

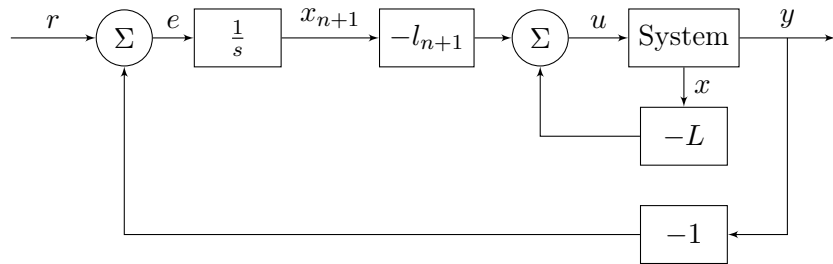
- Lätt att bestämma  $L$
- Lätt att inse att nollställena ej påverkas (samma  $C!$ )

Välj  $l_0$  så att  $G_c(0) = 1$ .

$$\Rightarrow l_0 = \frac{\alpha_n}{b_n}$$

Svaghet: Vi måste känna till  $\alpha_n$  och  $b_n$  exakt och får ej ha störningar eller statistiskt reglerfel.

# Yttre I-reglering



Vi tar till ett knep och inför *extra tillstånd*

$$x_{n+1} = \int_0^t e(\tau) d\tau = \int_0^t [r(\tau) - y(\tau)] d\tau$$

$$\dot{x}_{n+1} = -Cx + r$$

Vi utvidgar modellen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{n+1} \end{pmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix}}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}}_B u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

Tillståndsåterkoppla:

$$u = -Lx - l_{n+1}x_{n+1} \Leftrightarrow u = -\mathbf{L}\mathbf{x}$$

Välj  $\mathbf{L}$  så att  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{L}$  får önskade egenvärden (poler).

Stationärt har vi

$$\begin{cases} \dot{x} & = 0 \\ \dot{x}_n & = y - r = 0 \end{cases}$$

trots t.ex. stegstörningar och modellfel.

Vad gör man om alla tillståndsvariabler  $e_j$  kan mätas exakt?

**Svar:** Inför en *observatör*. (Skatta tillstånden)

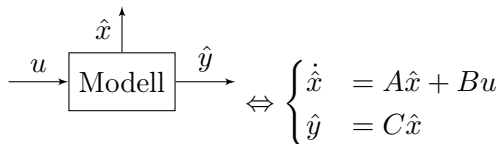
Exempelvis kan vi mäta läge och därutav uppskatta hastigheten.



Antag vi har en modell:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

Idén är att simulera systemet:



*Felsignalen* är

$$y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - C\hat{x}(t)$$

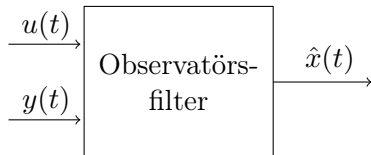
och ett mått på hur bra simuleringen fungerar.

**Återkoppla!**  $\Rightarrow$  Observatör (Kalmanfilter)

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

$$\Leftrightarrow \dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky$$

Observera att  $K$  är en  $n \times 1$  vektor (P-reglering).



Hur väljer vi  $K$ ?

Skattningsfelet  $\tilde{x}$  ges av:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - K(C\hat{x} - Cx) \\ &\implies \dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x},\end{aligned}$$

där  $\tilde{x}(0)$  är initialt fel,

Lösningen till  $\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x}$  ges av

$$\tilde{x}(t) = e^{[A-KC]t} \tilde{x}(0)$$

Notera att:

- $\tilde{x} \rightarrow 0$  då  $t \rightarrow \infty$  om egenvärdena till  $A - KC$  ligger i V.H.P.
- Med hjälp av  $K$  kan vi påverka hur snabbt  $\tilde{x} \rightarrow 0$
- Om systemet är observerbart kan man placera egenvärdena till  $A - KC$  godtyckligt

Mätfelet ges av  $y_m = y + e$ .

$$\Rightarrow \dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x} + Ke$$

Stort  $K \Rightarrow$  Känsligt för mätfel

Litet  $K \Rightarrow$  Långsamt

Optimera  $\Rightarrow$  Kalmanfilter!

Reglering: Välj  $|\text{eig}(A - BL)| \leq |\text{eig}(A - KC)|$

## Exempel

Betrakta systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

Vi beräknar

$$A - KC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{pmatrix}$$

och sedan

$$\det [sI - (A - KC)] = s^2 + k_1s + k_2$$

(Slutna systemets poler i  $-3$ ).

## Exempel (fort.)

Lägg observatörpolerna i t.ex.  $-4$ :

$$(s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

**Svar:**

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} (y - (1 \ 0) \hat{x})$$

# Återkoppling från rekonstruerade tillstånd

System:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

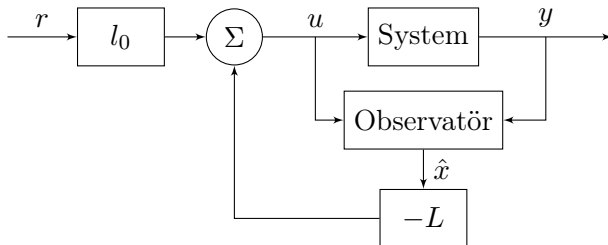
$$y = Cx$$

Observatör:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - c\hat{x})$$

Återkoppling:

$$u = -L\hat{x} + l_0 r$$





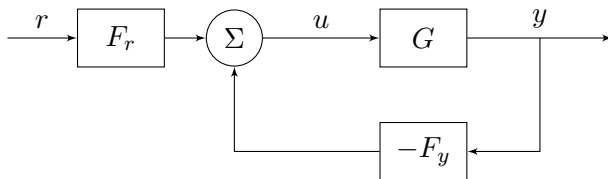
Återkopplat system? (Ordning  $2n$ )

$$G_c(s) = C[sI - (A - BL)]^{-1}Bl_0$$

Identisk  $G_c$  som vid tillståndsåterkoppling eftersom  $\hat{x}(0) = x(0) = 0$  vid överföringsfunktions-algebra.

Förklaring:  $\tilde{x}$  är ej styrbar, men observerbar. Motsvarande poler förkortas.

# Alternativ implementering



$$F_r = \left(1 - L[sI - (A - BL - KC)]^{-1}B\right)l_0$$
$$F_y = L[sI - (A - BL - KC)]^{-1}K$$

”Polplacering”

Den komplementärna känslighetsfunktionen ges av

$$T(s) = G_c(s) \times \underbrace{L[sI - (A - KC)]^{-1}K}$$

$L$ ,  $K$  och observatörens dynamik påverkar robustheten

Den vanliga känslighetsfunktionen ges av

$$S = 1 - T$$