28 & 29 september, 2015, Föreläsning 7 & 8

Tillämpad linjär algebra

Innehåll

- Matriser med speciella former
- LU-faktorisering med partiell pivotering
- Beräkningskostnad - komplexitet
- Noggrannhet vid numerisk lösning av linjära ekvationssystem
- Konditionstal, vektor och matrisnorm

1. Diagonalmatriser

Följande $n \times n$-matris kallas för en **diagonalmatris**

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Här är $d_1, d_2, \ldots, d_n$ reella tal. En diagonalmatris kan man enkelt invertera,

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{bmatrix}$$

Varför blir det så?

2. Symmetriska matriser

En **symmetrisk matris**, A, är en matris som har egenskapen att $A^T = A$. *Vad gäller för matrisens A's storlek?*

3. Glesa matriser

En gles $n \times n$-matris är en matris som till största delen består av element som är noll. En vanlig typ av glesa matriser är bandade matriser där alla element utanför ett smalt band (av storlek m element) runt diagonalen är noll. För att matrisen ska kallas gles så bör $m << n$.

En tridiagonal $n \times n$-bandmatris, $m = 3$, ser ut på följande sätt

$$A = \begin{bmatrix} * & * & & & & \\ * & * & * & & & \\ & * & * & * & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & * & * & * \\ & & & & * & * \end{bmatrix}$$

4. Triangulära matriser

En kvadratisk $n \times n$-matris kallas för **övertriangulär** (en. upper triangular) om alla element nedanför huvuddiagonalen är noll.

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

En kvadratisk $n \times n$-matris kallas för **undertriangulär** (en. lower triangular) om alla element ovanför huvuddiagonalen är noll.

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Kan en matris vara både över- och undertriangulär samtidigt?

Triangulära matriser har följande egenskaper

(1) Produkten av två undertriangulära/övertriangulära matriser är en undertriangulär/övertriangulär matris.
(2) En triangulär matris är inverterbar om och endast om all diagonalelement är skilda från noll. *Varför är det så?*
(3) Inversen av en inverterbar under/övertriangulär matris är under/övertriangulär.

5. **Uppgift.** Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifiera de listade egenskaperna (ovan) för triangulära matriser.

6. **Uppgift.** Lös $L\vec{x} = \vec{b}$ där

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

7. **Uppgift.** Lös $U\vec{x} = \vec{b}$ där

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

8. **Uppgift.** Vilken form får matrisen LU om L är en undertriangulär matris och U är en övertriangulär matris?

9. **Uppgift.** Hitta alla 3×3-diagonalmatriser, D, som har egenskapen att $D^2 = DD = D$.

10. LU-faktorisering

Resultaten av en Gauss-elimination av en $n \times n$-matris där man inte har gått hela vägen till en reducerad trappstegsform, kan beskrivas i matristermer som en **faktorisering** av matrisen A. Vi kan skriva $A = LU$ där L är en undertriangulär matris med ettor på diagonalen och U en övertriangulär matris.

Om vi vill lösa det linjära ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ kan vi istället lösa $LU\vec{x} = \vec{b}$.

Lösningsalgoritmen kan skrivas som

(1) LU-faktorisera $A \Rightarrow LU\vec{x} = \vec{b}$.
(2) Låt $\vec{y} = U\vec{x}$ och lös det undertriangulära systemet $L\vec{y} = \vec{b}$ genom **framåtsubstitution** $\Rightarrow \vec{y}$.
(3) Lös nu det övertriangulära systemet $U\vec{x} = \vec{y}$ genom **bakåtsubstitution** $\Rightarrow \vec{x}$.

Att lösa ett linjärt ekvationssystem med LU-faktorisering är väldigt effektivt om man har ett system med flera högerled.

Exempel. Hitta LU-faktoriseringen av

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{subtrahera } {\color{red}2}\times \text{ rad 1 från rad 2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{subtrahera } {\color{blue}-3}\times \text{ rad 1 från rad 3} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{subtrahera } {\color{orange}-\tfrac{7}{3}}\times \text{ rad 2 från rad 3} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = U$$

Den undertriangulära matrisen L skapas med ettor på diagonalen och rad-multiplikatorerna i den undre triangeln,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {\color{red}2} & 1 & 0 \\ {\color{blue}-3} & {\color{orange}-\frac{7}{3}} & 1 \end{bmatrix}$$

Det kan finnas fler LU-faktoriseringar av en matris A. Det beror på hur man gör faktoriseringen. Tillvägagångssättet som presenteras ovan är från *Numerical Analysis* av Sauer. I *Contemporary Linear Algebra* av Anton & Busby gör man lite annorlunda.

11. **Uppgift.** LU-faktorisera följande matris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

och lös sedan systemet $LU\vec{x} = \vec{b}$ där $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

12. **Uppgift.** LU-faktorisera följande matriser

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

13. **Uppgift.** LU-faktorisera följande matris

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Det är inte säkert att en icke-singulär kvadratisk matris, A, har en LU-faktorisering. Men om A kan reduceras till trappstegsform med Gauss-elimination **utan radbyten**, så har A en LU-faktorisering. Mer om detta nästa föreläsning. (Med en icke-singulär matris menar vi en matris för vilken inversen existerar.)

14. ***LU*-faktorisering och partiell pivotering**

Vid LU-faktoriseringen av en matris A så gör vi en Gauss-elimination där vi strävar efter att noll-ställa alla element under huvuddiagonalen. Första steget ges av

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{subtrahera } \frac{a_{21}}{a_{11}} \times \text{ rad 1 från rad 2} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} \end{bmatrix}$$

Vad händer om $a_{11} = 0$?

För att undvika division med noll eller små tal kan man behöva byta plats på raderna i matrisen. Det kallas att göra en **partiell pivotering**. Om vi måste göra ett radbyte under en LU-faktorisering får vi istället en $PA = LU$-faktorisering där P är en så kallad **permutationsmatris**.

En permutationsmatris är en $n \times n$-matris som bara innehåller nollor förutom en etta i varje rad och kolonn. Exempel på några 3×3-permutationsmatriser

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi kan se en permutationsmatris, P, som en identitetsmatris där vissa av raderna har bytt plats. Om vi multiplicerar P med en matris A kommer produkten, PA, bli densamma som om vi bytt motsvarande rader i A.

15. **Uppgift.** Hur många 3×3-permutationsmatriser finns det och hur ser de ut?

16. **Uppgift.** Låt

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Vad blir P_1A_1 och P_2A_1? Om P_1 och P_2 är matriserna ovan.

Om $A_2 = PA_1$, hur ser P ut?

En LU-faktorisering med partiell pivotering ges av $PA = LU$ och lösningsalgoritmen för att lösa $A\vec{x} = \vec{b}$ ges av

(1) $PA\vec{x} = P\vec{b} \Rightarrow LU\vec{x} = P\vec{b}$.
(2) Låt $\vec{y} = U\vec{x}$ och lös det undertriangulära systemet $L\vec{y} = P\vec{b}$ genom **framåtsubstitution** $\Rightarrow \vec{y}$.
(3) Lös nu det övertriangulära systemet $U\vec{x} = \vec{y}$ genom **bakåtsubstitution** $\Rightarrow \vec{x}$.

17. **Uppgift.** Lös följande system med $PA = LU$-faktorisering

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

18. **Uppgift.** Lös följande system med $PA = LU$-faktorisering

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

19. **Beräkningskostnad - komplexitet**

När vi löser ett problem numeriskt med hjälp av en dator är beräkningskostnaden intressant. Beräkningskostnaden för en datoralgoritm mäts vanligtvis i antalet flyttalsoperationer (**flop**). En flop är en multiplikation, division, addition eller subtraktion.

Vanligtvis vill man veta hur antalet flops beror av storleken på problemet som man vill lösa (problemets **komplexitet**). Antag att vi har ett $n \times n$-system, $A\vec{x} = \vec{b}$, då gäller

- Gauss elimination: $O(2/3n^3)$
- LU-faktorisering av A: $O(2/3n^3)$

- Framåtsubstitution: $O(n^2)$
- Bakåtsubstitution: $O(n^2)$
- Beräkna inversen av A genom $[A|I] \Rightarrow [I|A^{-1}]$: $O(2/3n^3)$
- Beräkna inversen av $A^{-1}\vec{b}$: $O(2/3n^3)$
- LU-faktorisering av A om A är en *gles bandmatris*: $O(n)$
- Framåtsubstitution för en glas bandmatris: $O(n)$
- Bakåtsubstitution för en gles bandmatris: $O(n)$

Om vi vet hur många flop/s (flops) en dator gör kan vi få en uppskattning av beräkningskostnaden i tid.

20. **Uppgift.** Antag att det tar 0.2 sekunder att Gauss-eliminera en $n \times n$-matris A på din dator när $n = 1000$. Hur lång tid skulle det ta att Gauss-eliminera ett matris med $n = 10000$ obekanta?

21. **Uppgift.** Antag att det tar 0.005 sekunder att göra en bakåtsubstitution med 5000 obekanta på en dator. Hur lång tid skulle det ta att göra en Gauss-elimination av en $n \times n$-matris där $n = 5000$?

22. Noggrannhet vi numerisk lösning av linjära ekvationssystem

Konditionstalet hos ett problem säger oss något om hur fel fortplantar sig genom problemet. Om ett litet fel i indata producerar ett litet fel i utdata så har problemet ett litet konditionstal och problemet är **välkonditionerat**. Om små fel in ger stora fel ut är konditionstalet stort och problemet är **illa-konditionerat**.

Vid lösning av ett linjärt ekvationssystem, $A\vec{x} = \vec{b}$ gäller följande samband mellan det relativa felet i lösningen och det relativa felet i högerledet

$$\frac{\|\vec{x}_{ref} - \vec{x}\|_\infty}{\|\vec{x}_{ref}\|_\infty} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{\|\vec{b}_{ref} - \vec{b}\|_\infty}{\|\vec{b}_{ref}\|_\infty}.$$

Konditionstalet ges av

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$$

där $\|A\|_\infty$ är *maxnormen* av A (se nedan).

I MATLAB kan vi beräkna konditionstalet för en matris A med `cond(A,inf)`.

23. Matris och vektornorm

Vi har tidigare sett att vi kan mäta storleken av en vektor med hjälp av vektorns längd. Ett annat ord för längd i det här sammanhanget är **norm**. Vi kan även beräkna normen av en matris. Det finns flera olika val av normer

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \quad \text{Euklidiska normen}$$
$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_j |x_j| \quad \text{Maxnorm}$$
$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{Maxnorm}$$

24. **Uppgift.** Beräkna maxnormen av följande matriser

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

25. **Uppgift.** Beräkna konditionstalet (i maxnorm) för följande matriser

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$