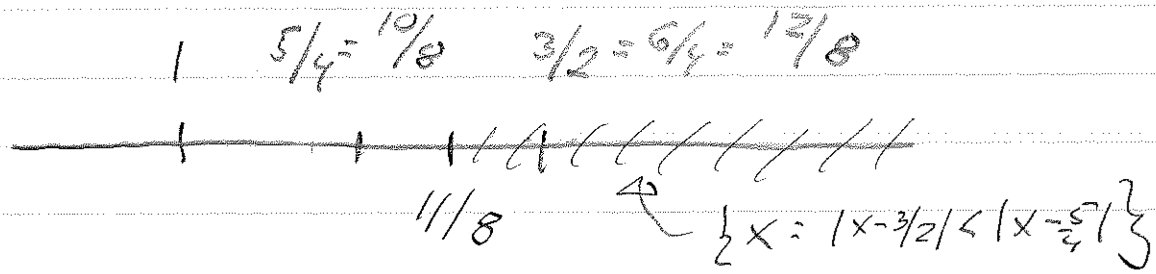
Kontrollskrivning 2 SF1661
30/9 2014
SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG

1 a) Olikheten $\left|x-\frac{3}{2}\right| < \left|x-\frac{5}{4}\right|$ är, enligt avståndstolkningen av absolutbeloppet, uppfylld för precis de x som ligger närmare $3/2$ än $5/4$.

Vi har följande bild



Eftersom $\frac{11}{8}$ utgör mittpunkt på sträckan från $5/4$ till $3/2$ är given olikhet uppfylld för $x > 11/8$

b) $\frac{1}{x} \geq \frac{27}{x^4} \iff \frac{x^3-27}{x^4} \geq 0$

$x^4 \geq 0$

$\iff x^3 - 27 \geq 0,\ x \neq 0 \iff x^3 \geq 27$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$\iff x \geq \sqrt[3]{27} \iff x \geq 3$

Svar: a) $x > 11/8$ b) $x \geq 3$

2 a)

Låt $S = \sum_{j=0}^{100} \frac{2}{3^j}$. S är en geometrisk

summa med kvot = 1/3. Vi bildar

$\frac{1}{3}S$ och sedan $S - \frac{1}{3}S$, och löser ut S:

$$S = \left(2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^{100}}\right)$$

$$- \quad \frac{1}{3}S = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots \frac{2}{3^{100}} + \frac{2}{3^{101}}\right)$$

$$\frac{2}{3}S = 2 - \frac{2}{3^{101}} \iff$$

$$S = 3\left(1 - \frac{1}{3^{101}}\right) = \frac{3^{101}-1}{3^{100}}$$

b) $\sum_{j=0}^{100} \left(2 + \frac{j}{3}\right) = \sum_{j=0}^{100} 2 + \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{100} j$

Vi beräknar de två delsummorna separat

$$\sum_{j=0}^{100} 2 = 101 \cdot 2 = 202$$

$$\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{100} j = \frac{1}{3}\,\frac{100 \cdot 101}{2} = \frac{1}{3}5050$$

Alltså är

$$\sum_{j=0}^{100} \left(2 + \frac{j}{3}\right) = 202 + \frac{5050}{3} = \frac{606+5050}{3} = \frac{5656}{3}$$

SVAR: a) $\frac{3^{101}-1}{3^{100}}$ b) $\frac{5656}{3}$

3. Vi bevisar m h a induktion över n att

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_+$$

För $n=1$ gäller att

$$V.L. = \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 \quad \text{och}$$

$$H.L. = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$$

så $V.L. = H.L.$ då $n=1$

Antag nu att $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^3 = \left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2$

för något tal $p \in \mathbb{Z}_+$

Då gäller för $n = p+1$ att

$$V.L. = \sum_{k=1}^{(p+1)} k^3 = \sum_{k=1}^{p} k^3 + (p+1)^3 = \left\{\begin{matrix}\text{enligt} \\ \text{induktions-} \\ \text{antagandet}\end{matrix}\right\}$$

$$= \left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2 + (p+1)^3 = (p+1)^2\left[\frac{p^2}{2^2} + (p+1)\right]$$

$$= (p+1)^2\left(\frac{p^2}{2^2} + \frac{(4p+4)}{2^2}\right) = (p+1)^2\left(\frac{p^2+4p+4}{2^2}\right)$$

$$= (p+1)^2\left(\frac{(p+2)^2}{2^2}\right) = \left(\frac{(p+1)(p+2)}{2}\right)^2 = H.L.$$

Alltså är formeln sann för alla $n \in \mathbb{Z}_+$ enligt induktionsprincipen.