Institutionen för Matematik

SF1625
Envariabelanalys
Läsåret 2015/2016

Modul 5
Integraler

Denna modul omfattar kapitel 5 och avsnitt 6.1-6.2 i kursboken Calculus av Adams och Essex och undervisas på tre föreläsningar, två övningar och ett seminarium.

Viktiga begrepp. Denna modul handlar om **integraler.** Det slås fast i en precis definition vad som menas med att en funktion är integrerbar på ett intervall och vad i så fall integralen av f över det intervallet är. Men det är inte definitionen man normalt använder för att räkna ut integraler, utan andra metoder som bygger på definitionen. Den viktigaste satsen är **integralkalkylens huvudsats** (the fundamental theorem of calculus) som säger att derivata och integral i någon mening är inversa operationer. En följd av detta är att man kan använda primitiv funktion (på engelska anti-derivative) för att räkna ut integraler. Eftersom det ofta är svårt att hitta primitiva funktioner, så har ett antal tekniker utvecklats för detta ändamål. De viktigaste är **variabelsubstitution** och **partiell integration**. För rationella funktioner kan **partialbråksuppdelning** (på engelska partial fractions) användas. I praktiken är förstås också numeriska metoder och programvara vitkiga verktyg.

Det är viktigt att du blir bra på att **integrera**, så träna mycket. Att iIntegrera är på sätt och vis knepigare än derivera, för här räcker det inte att lära sig integrationsteknikerna; man måste också skaffa sig en känsla för när de olika teknikerna passar att användas. Den känslan får man genom flitig övning.

Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus. Kapitel 5.1: 1, 3, 7, 9, 17, 33. Kapitel 5.2: 1, 3. Kapitel 5.3: 1, 5, 9, 11, 17. Kapitel 5.4: 1, 3, 23. Kapitel 5.5: 3, 8, 27, 33, 39, 40, 41. Kapitel 5.6: 5, 6, 7, 9, 21, 23, 43. Kapitel 5.7: 11, 17. Kapitel 6.1: 1, 3, 5, 7, 13, 21. Kapitel 6.2: 1, 5, 9, 11, 13, 23.

KAN DU DET HÄR TILLRÄCKLIGT BRA? TESTA DIG SJÄLV!

Uppgift 1. Beräkna nedanstående integraler (tänk på: när ska svaret innehålla en godtycklig konstant och när ska det inte göra det?):

A. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$

B. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$

C. $\displaystyle\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

D. $\displaystyle\int \frac{dx}{x}$

E. $\displaystyle\int \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) dx$

Uppgift 2. Beräkna nedanstående integraler med hjälp av angiven substitution:

A. $\displaystyle\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{1+4x^2}$ (sätt $u = 2x$)

B. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$ (sätt $t = 1 + x^2$)

C. $\displaystyle\int_{-1}^{0} xe^{-x^2}\, dx$ (sätt $t = x^2$)

D. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}\, dx$ (sätt $t = \ln x$)

E. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\, dx$ (sätt $u = \sin x$)

Uppgift 3. Beräkna nedanstående integraler med hjälp av partiell integration:

A. $\displaystyle\int_{0}^{1} xe^{-x}\, dx$

B. $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{e}} x \ln x\, dx$

C. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} x \sin x\, dx$

D. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx$

Uppgift 4. Finns det några symmetrier som gör dessa integraler lättare att beräkna? Beräkna dem!

A. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sin x \, dx$

B. $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{|x|} \, dx$

C. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \arctan x \, dx$

Uppgift 5. Beräkna nedanstående integraler med hjälp av partialbråksuppdelning

A. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2 - 9}$

B. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$

C. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^2}{x^2 + 4x + 3} \, dx$

Uppgift 6. Beräkna följande integraler. Du kan behöva kombinera flera metoder.

A. $\displaystyle\int_{0}^{1} \arctan x \, dx$

B. $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \arcsin t \, dt$

C. $\displaystyle\int_{1}^{e} (\ln u)^2 \, du$

Uppgift 7. Derivera nedanstående uttryck med avseende på x:

A. $\displaystyle\int_{0}^{x} \sqrt{1+t} \, dt$

B. $\displaystyle\int_{x}^{0} \sqrt{1+t} \, dt$

C. $\displaystyle\int_{0}^{x^2} \sqrt{1+t} \, dt$

Uppgift 8. Låt $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} \cos(t^2) \, dt$. Beräkna $F(0)$, $F'(0)$ och $F''(x)$ och beräkna sedan $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x}$.

Uppgift 9. Bevisa följande olikheter med hjälp av de grundläggande egenskaperna för integraler.

A. $\displaystyle\int_a^b \sin^2 x\, dx < \int_a^b |\sin x|\, dx$ om $a < b$.

B. $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{-|x|} < 2$

C. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx < 1$

Uppgift 10. Vi ska approximera integralen $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x}$ med Riemannsummor.

A. Ange en Riemannsumma med två termer som är en undersumma till integralen
B. Ange en Riemannsuymma med fyra termer som är en undersumma till integralen.
C. Använd svaret i uppgift B för att ge ett närmevärde till $\ln 2$. Förklara!

Uppgift 11. Här är en uppgift om Riemannsummor.

A. Ange en integral som $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{k}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{10}$ är en Riemannsumma till.

B. Beräkna (med hjälp av en integral) gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n}$

Uppgift 12. Betrakta integralen $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$

A. Är e^{-x^2} integrerbar på intervallet $[0,1]$? Varför?
B. Kan du beräkna I exakt med hjälp av primitiv funktion?
C. Kan du approximera I ? Gör det!

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. A. $\arctan x + C$ där C är en godtycklig konstant
1. B. $2\sqrt{1+x} + C$ där C är en godtycklig konstant
1. C. $\pi/6$ (obs ingen konstant C här!)
1. D. $\ln|x| + C$ där C är en godtycklig konstant
1. E. $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{1}{2x^2} + C$ där C är en godtycklig konstant

2. A. $\pi/24$
2. B. 1
2. C. $\dfrac{1-e}{2e}$
2. D. $1/2$
2. E. $3/2$

3. A. $1 - \frac{2}{e}$
3. B. $\dfrac{1}{4}$
3. C. 1
3. D. $\pi - 2$
3. E. $4/15$

4. A. 0
4. B. $2e - 2$ (integranden är jämn och integralen $= 2\int_0^1 e^x\,dx$)
4. C. 0 (integranden är udda och intervallet symmetriskt runt origo)

5. A. $-\dfrac{1}{6}\ln 5$
5. B. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$
5. C. $2 + 5\ln 3 - \dfrac{9}{2}\ln 5$ (utför polynomdivision först)

6. A. $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2$
6. B. $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1$
6. C. $e - 2$

7. A. $\sqrt{1+x}$
7. B. $-\sqrt{1+x}$
7. C. $2x\sqrt{1+x^2}$

8. $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ och $F''(x) = 2x\sin x^2$ som är begränsat nära origo så det sökta gränsvärdet fås med Taylorutveckling eller l'Hospials regel till 1.

9. Tips: om en funktion är mindre än en annan i ett helt intervall så är integralen över det intervallet mindre än motsvarande integral för den andra funktionen.

10. A. $\dfrac{1}{3/2} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = 7/12$

10. B. $\dfrac{1}{5/4} \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3/2} \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{7/4} \cdot \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} = 533/840 \approx 0.6345$

10. C. Eftersom integralen är exakt $\ln 2$ approximerar Riemannsumman i B (och A) detta tal. Så $\ln 2 \approx 0.6345$. Felet i approximationen har vi nu inte analyserat så vi vet inte hur bra den är.

11. A. $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$

11. B. $1/4$

12. A. Ja! Funktionen är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet. Därför är den integrerbar.

12. B. Nej! Det går inte att skriva upp en primitiv funktion med hjälp av elementära uttryck.

12. C. Det finns flera sätt. Ett sätt är med hjälp av Riemannsummor (eller trapetsregeln om man känner till den). Ett annat sätt är att Taylorutveckla. Om man Taylorutvecklar integranden upp till grad 4 så får man att

$I \approx \displaystyle\int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx = 23/30 \approx 0.77$. Felet i denna approximation är mindre än $1/42$.