Institutionen för Matematik

SF1625
Envariabelanalys
Läsåret 2015/2016

Modul 4
Tillämpningar av derivata

Denna modul omfattar kapitel 4 i kursboken Calculus av Adams och Essex och undervisas på tre föreläsningar, två övningar och ett seminarium.

Viktiga begrepp. Denna modul handlar om **tillämpningar av derivata.** Några exempel: hitta **extrempunkter** till en funktion (max och min), **approximera** en funktion (det kan gälla **linjär approximation** eller mer allmänt approximation med hjälp av **Taylors formel**) och **kurvritning**.

Viktigt är förstås att kunna **använda derivata** som ett mått på en funktions förändringstakt som i avsnittet 4.1 om related rates. Ett par andra tillämpningar som tas upp är **ekvationslösning** med hjälp av Newton-Raphsons metod och **gränsvärdesberäkningar**. Med hjälp av andraderivatan kan man avgöra om en funktion är **konvex** eller **konkav** (boken kallar konvex för concave up och konkav för concave down). **Asymptoter** är ett annat tema som tas upp.

Att du är bra på att derivera är en förutsättning. Det är viktigt att du också blir bra på att göra **teckenschema för derivatan** och dra slutsatser av det. Det finns en del grundläggande begrepp som är mycket viktiga och som man lätt tar fel på. Missa inte detta. Titta t ex noga på vad begreppen **lokal extrempunkt** och **kritisk punkt** betyder och observera att det är **inte** är samma sak!

När man letar efter största och minsta värde av en funktion på ett intervall så är första frågan om det över huvud taget finns något största eller minsta värde. Här kan man ibland ha hjälp av max-min-satsen från kapitel 1: om funktionen är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall så måste max och min finnas. Var kan de i så fall antas? Jo i kritiska punkter, ändpunkter till intervallet och i singulära punkter. Inga andra punkter är möjliga. Om man inte har situationen med en kontinuerlig funktion på ett slutet och begränsat intervall så måste existensen av max/min utredas på annat sätt.

Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus. Kapitel 4.1: 5, 7, 9, 16, 17. Kapitel 4.2: 7, 9. Kapitel 4.3: 1, 5, 17. Kapitel 4.4: 3, 14, 29, 35. Kapitel 4.5: 5, 11, 27, 31. Kapitel 4.6: 3, 5, 9, 17, 31. Kapitel 4.8: 1, 7, 13, 21. Kapitel 4.9: 1, 3, 13, 30. Kapitel 4.10: 1, 5, 9

KAN DU DET HÄR TILLRÄCKLIGT BRA? TESTA DIG SJÄLV!

Uppgift 1. Betrakta funktionen $f(x) = xe^{-x}$.

A. Bestäm definitionsmängden till f, gör ett teckenschema för derivatan och bestäm alla lokala extrempunkter till f. Beräkna sedan ev relevanta gränsvärden och skissa kurvan $y = f(x)$.

B. Med hjälp av uppgift A kan du nu svara på dessa frågor:

+ Vad är värdemängden till f ?
+ Har f något största eller minsta värde, vilka är dessa i så fall?
+ Finns det något tal x sådant att $f(x) = 1$?

C. Finn alla inflektionspunkter till f och bestäm de intervall där f är konvex (concave up) respektive konkav (concave down).

D. Finn alla asymptoter till kurvan $y = f(x)$.

Uppgift 2. Betrakta funktionen $g(x) = \arctan x - \ln \sqrt{1 + x^2}$.

A. Bestäm definitionsmängden till g, gör ett teckenschema för derivatan och bestäm alla lokala extrempunkter till g. Beräkna sedan ev relevanta gränsvärden och skissa kurvan $y = g(x)$.

B. Med hjälp av uppgift A kan du nu svara på dessa frågor:

+ Vad är värdemängden till g ?
+ Har g något största eller minsta värde, vilka är dessa i så fall?
+ Hur många lösningar har ekvationen $g(x) = 1/10$?

Uppgift 3. Låt $h(t) = t - \sin t$.

A. Bestäm alla kritiska punkter till h
B. Bestäm alla lokala extrempunkter till h
C. Avgör om h antar något största respektive minsta värde

Uppgift 4. Låt $f(x) = \ln(1 + x)$.

A. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till f kring punkten $x = 0$.
B. Använd Taylorpolynomet ovan för att approximera $\ln 2$, dvs $f(1)$.
C. Avgör om felet i approximationen i uppgift B är mindre än $1/3$.

Uppgift 5. Här är två uppgifter till om Taylors formel.

A. Bestäm med hjälp av Taylorutveckling ett närmevärde till $\cos \dfrac{1}{10}$ med ett fel som är mindre än 10^{-5}.
B. Bestäm ett närmevärde till $\sqrt{104}$ med hjälp av ett lämpligt valt Taylorpolynom. Felet ska vara mindre än $5 \cdot 10^{-5}$.

Uppgift 6. Betrakta ekvationen $x^3 + x = 1$

A. Visa med hjälp av derivata att ekvationen har högst en lösning.
B. Visa med hjälp av satsen om mellanliggande värden att ekvationen har minst en lösning som ligger mellan 0 och 1.
C. Finn en approximation av lösningen genom att välja ett lämpligt startvärde och göra två iterationer av Newton-Raphsons metod.

Uppgift 7. Beräkna följande gränsvärden.

A. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{\tan h}$

B. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + \cos x - e^x}{x^2}$

C. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\sin t - \sin 1}{t-1}$

Uppgift 8. Här är två max/min-problem.
A. Avgör om $f(x) = xe^{-x^2/2}$ har något största respektive minsta värde och bestäm i så fall dessa.
B. Avgör om $f(x) = |x-1| + \sqrt{x+1}$ antar något största respektive minsta värde när x varierar i intervallet $[-1, 2]$ och bestäm i så fall dessa.

Uppgift 9. En sfärisk tank med radie 5 dm fylls med vatten i en takt av 3 liter per minut. Hur snabbt stiger vattenytan i tanken vid den tidpunkt då djupet är 2 dm? Tips: Vattenvolymen V beror på vattendjupet d enligt formeln

$$V = \pi \frac{15d^2 - d^3}{3}.$$

Uppgift 10. Låt $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

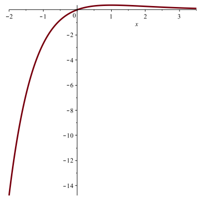
A. Gör ett teckenschema för derivatan och bestäm alla lokala extrempunkter till f.
B. Bestäm alla asymptoter till kurvan $y = f(x)$.
C. Beräkna eventuellt relevanta gränsvärden och skissa kurvan $y = f(x)$.

Uppgift 11. Arean av mantelytan hos en rät cirkulär kon med höjden h och bottenytans radie r ges av uttrrycket $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$. Givet en sådan kon med höjd 8 dm och bottenradie 6 dm. Använd linjär approximation för att beräkna ungefär hur mycket mantelytans area ändras om radien i denna kon ökas med 0.5 dm.

Uppgift 12. Vid en provskjutning beräknas projektilen i ett lämpligt valt koordinatsystem följa kurvan $y = 1 - x^2$. Hur nära en bunker placerad i origo kommer projektilen?

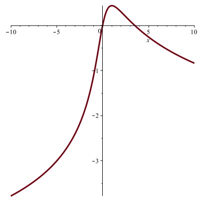
FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. A. Definitionsmängden är hela reella axeln. Det finns en enda kritisk punkt nämligen $x = 1$. Teckenschema för derivatan ger att den kritiska punkten är en lokal och global maxpunkt. Maxvärdet är $f(1) = 1/e$. Gränsvärdet i oändligheten är 0. Gränsvärdet i minus oändligheten är $-\infty$. Graf:



1. B. Alla reella tal mindre än eller lika med $1/e$
Största värdet är $1/e$, minsta värde saknas.
Nej, eftersom funktionens största värde är $1/e$ som är mindre än 1
1. C. Det finns en inflektionspunkt nämligen $x = 2$. Funktionen är konkav för $x < 2$ och konvex för $x > 2$.
1. D. $y = 0$ är asymptot när $x \to \infty$. Inga andra asymptoter finns.

2. A. Definitionsmängden är hela reella axeln. Det finns en enda kritisk punkt nämligen $x = 1$. Teckenschema för derivatan ger att den kritiska punkten är en lokal och global maxpunkt. Maxvärdet är $g(1) = \pi/4 - \ln\sqrt{2}$. Gränsvärdet i oändligheten är $-\infty$. Gränsvärdet i minus oändligheten är $-\infty$. Graf:



2. B. Alla reella tal mindre än eller lika med $\pi/4 - \ln\sqrt{2}$
Största värdet är $\pi/4 - \ln\sqrt{2}$, minsta värde saknas.
Två, eftersom $1/10$ är mindre än $\pi/4 - \ln\sqrt{2}$ (titta på grafen)

3. A. Det finns oändligt många kritiska punkter (punkter där derivatan är noll), nämligen punkterna $n2\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.
3. B. Funktionen har inga lokala extrempunkter.
3. C. Funktionen saknar största och minsta värde. (den är strängt växande på hela reella axeln, de kritiska punkterna är allihop terasspunkter (som alltså inte är extrempunkter))

4. A. Det sökta polynomet är $p(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$

4. B. $\ln 2 = f(1) \approx 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

4. C. Felet i approximationen i B ges av $\dfrac{2/(c+1)^3}{3!} \cdot 1^3$ för något c mellan 0 och 1. Detta är högst $1/3$.

5. A. $\cos\frac{1}{10} \approx 0.995$ med ett fel som är mindre än 10^{-5}

5. B. $\sqrt{104} \approx 10.198$ med ett fel som är mindre än $5 \cdot 10^{-5}$

6. Sätt $f(x) = x^3 + x - 1$. Ekvationen är då ekvivalent med $f(x) = 0$. Derivatan är positiv överallt, vilket medför att f är strängt växande och att högst en lösning kan finnas. Då $f(0) = -1$ och $f(1) = 1$ och f är kontinuerlig överallt följer av satsen om mellanliggande värden att det finns en lösning mellan 0 och 1. Med startvärde $x_0 = 0$ och två iterationer med Newton-Raphson fås lösningen som ungefär $x_2 = 3/4$.

7. A. $1/2$
7. B. -1
7. C. $\cos 1$

8. A. Ja, minsta värdet är $-1/\sqrt{e}$ och största värdet är $1/\sqrt{e}$. Se exempel 8 i bokens kap 4.6. Här måste man göra teckenschema för derivatan och beräkna gränsvärden i $\pm\infty$ för att veta om största/minsta värde finns.

8. B. Ja, den här funktionen är kontinuerlig på hela det slutna och begränsade intervallet så största och minsta värde finns garanterat enligt max-min-satsen från kapitel 1. Dessa kan antas i kritiska punkter, ändpunkter eller singulära punkter. Det finns en kritisk punkt $x = -3/4$, en singulär punkt $x = 1$ och ändpunkterna är -1 och 2. Kolla dessa och se att minsta värdet är $\sqrt{2}$ (antas i den singulära punkten) och största värdet är $1 + \sqrt{3}$ (antas i högra ändpunkten).

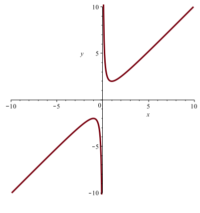
9. Ytan stiger i takten $\frac{3}{16\pi}$ dm per minut.

10. A. $f(x)$ är definierat för alla $x \neq 0$. Teckenschema för derivatan:
Om $x < -1$ så är $f'(x) > 0$ och funktionen är alltså strängt växande.
Om $x = -1$ så är $f'(x) = 0$
Om $-1 < x < 0$ så är $f'(x) < 0$ och funktionen är alltså strängt avtagande.
Om $x = 0$ så är $f(x)$ inte definierat.
Om $0 < x < 1$ så är $f'(x) < 0$ och funktionen är alltså strängt avtagande.
Om $x = 1$ så är $f'(x) = 0$
Om $x > 1$ så är $f'(x) > 0$ och funktionen är alltså strängt växande.
Det följer av teckenschemat att f har en lokal maxpunkt i $x = -1$ och en lokal minpunkt i $x = 1$.

B. Eftersom $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ och $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ så är linjen $x = 0$ lodrät asymptot till kurvan.

Med hjälp av omskrivningen $\dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$ ser vi att linjen $y = x$ är sned asymptot i $\pm\infty$

C. Kurvan:



11. Arean ökar med ungefär 13.6π kvadratdecimeter
12. Minsta avståndet är $\sqrt{3}/2$ längdenheter.