KTH VETENSKAP OCH KONST

KS 1 SF1661 HT 15. Tisdag 15/9

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.
SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG				

1. a) $\sqrt{\frac{25}{36} - \frac{49}{100}} = \left\{ \begin{array}{l} 36 = 2^2 \cdot 3^2 \\ 100 = 2^2 \cdot 5^2 \\ MGM(36,100) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900 \end{array} \right\}$

$$= \sqrt{\frac{25 \cdot 5^2 - 49 \cdot 3^2}{900}} = \sqrt{\frac{625 - 441}{900}} =$$

$$= \sqrt{\frac{184}{900}} = \sqrt{\frac{46}{225}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 23}{3^2 \cdot 5^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{46}}{15}$$

b) $\left(\frac{x^1 \cdot x^{1/4}}{x^{1/2} \cdot x^{1/3}} \right)^{1/5} = x^{\frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} =$

$$= x^{\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{12 + 3 - 6 - 4}{12} \right)} = x^{\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{12}} = x^{1/12}$$

Svar: a) $\frac{\sqrt{46}}{15}$ b) $x^{1/12}$

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

2a) Sätt $r = 1.121212....$

Då är $100r = 112,121212....$

Så $99r = 100r - r = 111$,

dvs $r = \frac{111}{99} = \frac{37}{33}$

<u>SVAR:</u> $p = 37$, $q = 33$

2b)

Ja, kvoten $\frac{r}{t} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, om $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ och $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

<u>Bevis:</u> Antag motsatsen, dvs $\frac{r}{t} \in \mathbb{Q}$, och sätt $y = \frac{r}{t}$.

Observera att $y \neq 0$ eftersom $r \neq 0$.

$y = \frac{r}{t} \iff t = \frac{r}{y}$

Eftersom $r \in \mathbb{Q}$ (enligt förutsättning), och $y \in \mathbb{Q}$ (enligt antagande), gäller $t \in \mathbb{Q}$ (då kvoten av rationella tal är rationell), vilket motsäger $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alltså är antagandet $r/t \in \mathbb{Q}$ felaktigt.

KTH VETENSKAP OCH KONST

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

3. a) Låt $A(n)$ = "antal primtal $\leq n$"

och låt $F(n) = \frac{A(n)}{n}$, för $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$

Primtalssatsen säger att

$$F(n) \sim \frac{1}{\ln n}, \quad n \to \infty,$$

det vill säga att

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F(n)}{\frac{1}{\ln n}} = 1$$

b). Antag att det endast finns ändligt många primtal $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$.

Bilda $r = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \ldots \cdot P_n + 1$.

r ger rest 1 vid division med något av primtalen $P_1, P_2 \ldots P_n$, och är alltså inte delbart med något av dessa.

Alltså innehåller r andra primfaktorer än $P_1 \ldots P_n$, vilket motsäger antagandet att detta var alla primtal.