KS2 SF1661 29/9 2015
SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG

1. a) Eftersom $p(2)=0$ (givet) är $(x-2)$ en faktor i $p(x)$, enligt FAKTORSATSEN. Polynomdivision ger

$$p(x) = (x^3-1)(x-2)$$

så $p(x)=0 \Rightarrow x^3-1=0 \lor x-2=0$

x^3-1 har bara ett reellt nollställe $x=1$, så $p(x)$ har två reella nollställen

SVAR: $x=1$ och $x=2$

b) $p(x)=(x^3-1)(x-2)$. Teckentabell ger

		1		2	
(x^3-1)	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$p(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

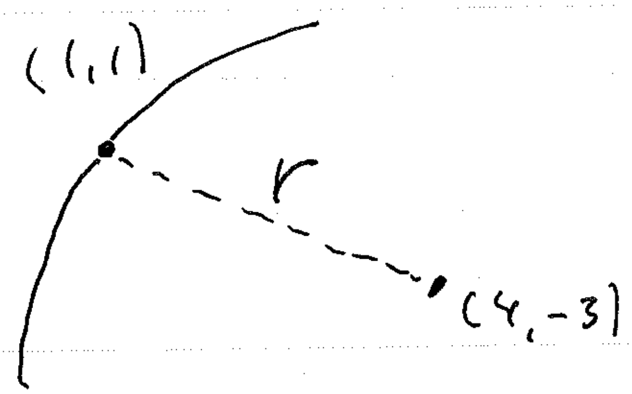
att $p(x)<0$

$\Leftrightarrow$

$1<x<2$

SVAR: $1<x<2$

2. a)



r = radien i sökt cirkel = avståndet mellan $(4,-3)$ och $(1,1)$ = {avståndsformeln}

$$= \sqrt{(4-1)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

En cirkel med radie r och medelpunkt (a,b) beskrivs av ekvationen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

så i detta fall blir sökt ekvation

SVAR: $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$

② b) $$\left(x+\frac{1}{5}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^{15-k} \left(\frac{1}{5}\right)^{k}$$

(enligt BINOMIALSATSEN)

x^{12}-termen fås för $k=3$:

$$\binom{15}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{3} x^{15-3} = \binom{15}{3}\frac{1}{5^3}x^{12},$$ så

sökt koefficient är

$$\binom{15}{3}\cdot\frac{1}{5^3} = \frac{15!}{12!\,3!}\cdot\frac{1}{5^3} = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 5^3} = \frac{7\cdot 13}{25}$$

$$= \frac{91}{25}$$

SVAR: $\frac{91}{25}$

(3.) Vi vill bevisa påståendet

$$\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2 \qquad (P_n)$$

för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.

(I) (Induktionsbas). Om $n=1$ fås

$$V.L. = \sum_{j=1}^{1} (2j-1) = (2-1) = 1 = 1^2 = H.L.$$

så påståendet P_1 är sant.

(II) (Induktionsantagande). Antag nu att P_k är sant för något $k \in \mathbb{Z}_+$, dvs anta att $\sum_{j=1}^{k} (2j-1) = k^2$.

(III) (Induktionssteg) Om P_k är sant fås för $n=k+1$ att.

$$V.L. = \sum_{j=1}^{k+1} (2j-1) = \sum_{j=1}^{k} (2j-1) + [2(k+1)-1] = \left\{\begin{matrix}\text{Enligt}\\ \text{antagandet}\\ P_k \text{ sant}\end{matrix}\right\}$$

$$= k^2 + 2(k+1) - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 = H.L.$$

Slutsats: $\left.\begin{matrix} P_1 \text{ är sann} \\ P_k \text{ sann} \Rightarrow P_{k+1} \text{ sann}\end{matrix}\right\} \Rightarrow P_n$ sann alla $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

enligt INDUKTIONSPRINCIPEN