Lösningsförslag till Tentamen, SF1629, Differentialekvationer och Transformer II (del 1)
24 oktober 2014 kl 8:00 - 13:00.

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonus från kontrollskrivningen gäller uppgift (1).
Preliminära betygsgränser: 14 poäng ger garanterat betyg E, 17 poäng ger garanterat betyg D, 21 poäng ger garanterat betyg C, 24 poäng ger garanterat betyg B och 28 poäng ger garanterat betyg A. Den som har 13 poäng får betyg Fx och har möjlighet att komplettera. Kontakta i så fall examinatorn.
Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen *Mathematics Handbook* av Råde och Westergren.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och väl motiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

(1) Betrakta differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = y(2-y) - \alpha$$

där talet α är en parameter.

a) Bestäm de kritiska punkterna samt rita faslinjen i fallen då $\alpha = 0$, $\alpha = 1/2$ och $\alpha = 1$. **(2p)**

b) Låt $\alpha = 1$. Bestäm explicit de tre lösningar till ekvationen som uppfyller $y(0) = 2$, $y(0) = 1$ respektive $y(0) = 0$. Vilka av dessa är begränsade för alla $t > 0$? **(2p)**

Lösning: Vi har en autonom ekvation.

a) Låt $f(y) = y(2-y) - \alpha$ vara högerledet i ekvationen. De kritiska punkterna är f:s nollställen.

Fall $\alpha = 0$: nollställena ges av $y(2-y) = 0$ vilket ger $y = 0$ och $y = 2$. En teckenanalys ger följande faslinje:

$$-- < -- (0) -- > -- (2) -- < --$$

Fall $\alpha = 1/2$: nollställena ges av $y(2-y) - 1/2$ vilket ger $y = 1 \pm 1/\sqrt{2}$. Faslinjen blir

$$-- < -- (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) -- > -- (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) -- < --$$

Fall $\alpha = 1$: nollställena ges av $y(2-y) - 1 = -(y-1)^2$ vilket ger $y = 1$ (dubbelrot). Faslinjen blir

$$-- < -- (1) -- < --$$

b) När $\alpha = 1$ kan ekvationen skrivas

$$\frac{dy}{dt} = -(y-1)^2.$$

Vi såg ovan att $y = 1$ är en kritisk punkt, dvs den konstanta funktionen $y(t) = 1$ är en lösning till ekvationen. Ekvationen är separabel, så för $y \neq 1$ får vi

$$-\frac{dy}{(y-1)^2} = dt,$$

vilket ger

$$\frac{1}{y-1} = t + C.$$

Således får vi

$$y = 1 + \frac{1}{t+C}.$$

Vi söker nu de lösningar som uppfyller begynnelsevillkoren.

Fall $y(0) = 2$: Vi får

$$2 = y(0) = 1 + \frac{1}{C} \Leftrightarrow C = 1,$$

dvs lösningen blir $y = 1 + \frac{1}{t+1}$. Denna lösning är begränsad för alla $t > 0$ (och går mot 1 då $t \to \infty$).

Fall $y(0) = 1$: Detta ger den konstanta lösningen $y(t) = 1$, som förstås är begränsad för alla t.

Fall $y(0) = 0$: Vi får

$$0 = y(0) = 1 + \frac{1}{C} \Leftrightarrow C = -1,$$

dvs $y = 1 + \frac{1}{t-1}$. Notera att denna lösning endast existerar för $t < 1$, och lösningen går mot $-\infty$ då $t \to 1^-$.

(2) Betrakta det autonoma systemet

$$\frac{dx}{dt} = x - y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - y.$$

a) Bestäm den lösning som uppfyller $x(0) = 1,\ y(0) = 2$. **(3p)**

b) Verifiera, genom insättning i ekvationen, att lösningen som erhållits i a) verkligen är en lösning. **(1p)**

Lösning: a) Ekvationen kan skrivas på matrisform:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

där

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen A har egenvärdena $\lambda = \pm i$. Vektorn

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

är en egenvektor motsvarande egenvärdet $\lambda = i$. Således är

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}_1 e^{it}$$

en (komplex) lösning till ekvationen. Vi vet från teorin att real- och imaginärdelen av denna lösning är två linjärt oberoende lösningar till ekvationen. Vi har

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$$

två (reella) linjärt oberoende lösningar. Därför vet vi att den allmänna lösning till ekvationen är

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t).$$

Begynnelsevillkoren ger oss

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ 2c_1 \end{pmatrix}.$$

Detta ger $c_1 = 1, c_2 = 0$. Således är

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$$

den sökta lösningen.

b) Om

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$$

har vi

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t - \cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}$$

och

$$A\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t - \cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}.$$

Alltså är $\mathbf{x}(t)$ verkligen en lösning till ekvationen.

(3) a) Lös begynnelsevärdesproblemet **(3p)**

$$x^2y''(x) - 2y(x) = x^2; \quad y(1) = 3,\ y'(1) = 1/3.$$

b) Bestäm ett intervall där lösningen ovan säkert är unik. **(1p)**

Lösning: b) Eftersom ekvationen kan skrivas

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = 1,$$

och det största intervallet, som innehåller punkten $x = 1$, där funktionen $-2/x^2$ är kontinuerlig är $(0, \infty)$, så följer det från existens- och entydighetssatsen (sats 3.2.1 på sidan 146 i B-DP) att lösningen är unik på detta intervall.

a) Vi löser först den homogena ekvationen

$$x^2y'' - 2y = 0.$$

Detta är en eulersk ekvation, så vi söker lösningar på formen $y = x^r$. Insättning i ekvationen ger

$$0 = x^2r(r-1)x^{r-2} - 2x^r = (r^2 - 2r - 2)x^r = (r-2)(r+1)x^r.$$

Alltså, vi får två lösningar: $y_1 = x^2$ och $y_2 = x^{-1}$.

Vi söker nu en partikulärlösning till den ursprungliga ekvationen med hjälp av variation av parametrar. Först skriver vi ekvationen på formen

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = 1.$$

Vi söker en lösning på formen $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$. Enligt formeln för variation av parametrar kan vi ta u_1 och u_2 sådana att

$$u_1' = -\frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}, \quad u_2' = \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}$$

där $g(x) = 1$ är högerledet i ekvationen ovan, och $W(x) = W(y_1, y_2)(x) = -3$ är Wronskideterminanten. Integrering ger att (sätt konstanterna till 0) vi kan ta

$$u_1(x) = \frac{\ln x}{3}, \quad u_2(x) = -\frac{x^3}{9}.$$

Således är

$$y_p(x) = \frac{x^2 \ln x}{3} - \frac{x^2}{9}$$

en partikulärlösning. Notera att $y = -x^2/9$ råkar vara en lösning till den homogena ekvationen.

Från informationen ovan kan vi nu dra slutsatsen att den allmänna lösningen till ekvationen på intervallet $x > 0$ är

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p = c_1x^2 + c_2x^{-1} + \frac{x^2 \ln x}{3}.$$

Begynnelsevillkoren ger att $c_1 = 1, c_2 = 2$. Således är

$$y = x^2 + 2x^{-1} + \frac{x^2 \ln x}{3}$$

den sökta lösningen.

(4) a) Bestäm en serielösning till begynnelsevärdesproblemet **(3p)**

$$y''(x) + xy'(x) + 2y(x) = 0; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

b) För vilka x konvergerar serien? **(1p)**

Lösning: b) Vi har en ekvation på formen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

där $p(x) = x$ och $q(x) = 2$. Eftersom både p och q är polynom så har de självklart oändlig konvergensradie (vi har serier med ändligt många termer). Från teorin (se sats 5.3.1 på sidorna 266-267 i B-DP) vet vi därför att serielösningarna till ekvationen också kommer att ha oändlig konvergensradie.

a) Eftersom vi har information om $y(0), y'(0)$ så söker vi en lösning på formen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots).$$

Termvis derivering ger

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (= a_1 + 2a_2 x + 3a_x^2 + \ldots)$$

och

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Eftersom $y(0) = a_0$ och $y'(0) = a_1$ så ger begynnelsevillkoren att vi måste ha $a_0 = 0, a_1 = 1$.

Vi noterar att vi kan skriva

$$xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

och

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

Insättning i ekvationen ger

$$
\begin{aligned}
0 =& y'' + xy' + 2y = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_n\right) x^n.
\end{aligned}
$$

Eftersom alla koefficienter måste vara noll får vi rekursionsrelationen

$$0 = (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_n = (n+2)((n+1)a_{n+2} + a_n), \quad n \geq 0$$

vilket ger

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+1}.$$

Ovan såg vi att vi måste ha $a_0 = 0$ och $a_1 = 1$. Rekursionsrelationen ger därför att

$$a_{2k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Vidare,

$$a_3 = -\frac{a_1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad a_5 = -\frac{a_3}{4} = \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2^2 2!}, \quad a_7 = -\frac{a_5}{6} = -\frac{a_5}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{2^3 3!}$$

Vi ser mönstret:

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{2^k k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Vi verifierar att detta är korrekt genom insättning i rekursionsrelationen. För $n = 2k+1$ får vi då enligt formeln

$$a_{n+2} = a_{2(k+1)+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!};$$

och enligt rekursionsrelationen:

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+1} = -\frac{a_{2k+1}}{2(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!}.$$

Således är

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} x^{2k+1}$$

den sökta lösningen.

(5) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y''(t) = \int_0^t (t-u)y(u)du, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 4.$$

Lösning: Om vi låter $f(t) = t$ så ser vi att ekvationen kan skrivas

$$y''(t) = (f * y)(t).$$

Laplacetransformerar vi bägge leden, och utnyttjar begynnelsevillkoren, får vi

$$s^2Y(s) - 4 = \frac{Y(s)}{s^2}$$

eftersom $\mathcal{L}(f(t)) = 1/s^2$. Löser vi ut $Y(s)$ fås

$$Y(s) = \frac{4s^2}{s^4 - 1} = \frac{4s^2}{(s^2+1)(s+1)(s-1)}.$$

Partialbråksuppdelar vi nu högerledet fås

$$\frac{4s^2}{s^4 - 1} = \frac{2}{s^2+1} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}.$$

Inverstransformering ger därför att

$$y(t) = 2\sin(t) + e^t - e^{-t}.$$

(6) Låt $f(x)$ vara en kontinuerlig funktion sådan att $f(0) = 0$ och $xf(x) > 0$ för alla $x \neq 0$, och låt $g(x)$ vara en kontinuerlig funktion sådan att $g(x) \geq 0$ för alla x. Betrakta differentialekvationen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(x)\frac{dx}{dt} + f(x) = 0.$$

Skriv om ekvationen som ett system av ekvationer av första ordningen. Avgör om den kritiska punkten till detta system är stabil eller instabil. (Tips: en funktion på formen $V(x,y) = ay^2 + b\int_0^x f(u)du$ kan vara till hjälp.)

Lösning: Vi börjar med att skriva ekvationen som ett system. Låter vi $y = x'$ får vi systemet

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = -g(x)y - f(x)$$

eftersom $y' = x'' = -g(x)x' - f(x) = -g(x)y - f(x)$. Eftersom $f(x) \neq 0$ för $x \neq 0$ så följer att $(0,0)$ är den enda kritiska punkten.

Planen nu är att använda Lyapunovs direkta metod. Vi använder oss av ”energin”

$$V(x,y) = ay^2 + b\int_0^x f(u)du.$$

Först noterar vi att villkoret $xf(x) > 0$ medför att $f(x) > 0$ för $x > 0$ och $f(x) < 0$ för $x < 0$. Således har vi att $\int_0^x f(u)du > 0$ för $x > 0$ och $\int_0^x f(u)du = -\int_x^0 f(u)du > 0$ för $x < 0$. Eftersom också $V(0,0) = 0$ och $y^2 > 0$ för $y \neq 0$ så följer det att $V(x,y)$ positivt definit om konstanterna $a, b > 0$.

Vidare har vi (undersök hur energin varierar längs banan)

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}y'(t) = bf(x)y + 2ay(-g(x)y - f(x)) = \\ &= f(x)y(b-2a) - 2ay^2 g(x).\end{aligned}$$

Väljer vi, t ex, $a = 1$ och $b = 2$ (notera att båda är positiva, så $V(x, y)$ är positivt definit) så blir högerledet $-2y^2 g(x) \leq 0$ för alla x, y eftersom $g(x) \geq 0$. Vidare är högerledet 0 om $x = y = 0$. Alltså är dV/dt negativt semi-definit.

Från Lyapunovs sats, sats 9.6.1 på sidan 558 i B-DP, följer således att den kritiska punkten $(0, 0)$ är stabil.

(7) Låt y_1 och y_2 vara de lösningar till ekvationen

$$y''(x) + (\cos x)y'(x) + (\sin x)y(x) = 0$$

som uppfyller $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ respektive $y_2(0) = 1, y_2'(0) = 2$. Bestäm för varje reellt tal x Wronskideterminanten $W(y_1, y_2)(x)$.

Lösning: Vi vet att för en ekvation på formen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

så uppfyller Wronskideterminanten W differentialekvationen

$$W' + p(x)W = 0.$$

Se sats 3.2.7 på sidan 154 i B-DP. I vårt fall är $p(x) = \cos x$, så vi får ekvationen

$$W' + (\cos x)W = 0.$$

Denna (linjära) ekvation har lösningen

$$W = Ce^{-\sin x}.$$

Vidare ger begynnelsevillkoren att

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Detta ger oss värdet på C:

$$2 = W(0) = C.$$

Således, för varje $x \in \mathbb{R}$ har vi

$$W(x) = 2e^{-\sin x}.$$

(8) Betrakta ekvationen

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$$

där funktionerna p och q är kontinuerliga på $\mathbb{R}$. Antag att y_1, y_2 är en fundamental lösningsmängd till ekvationen. Visa, genom att använda existens- och entydighetssatsen, att varje lösning $y(t)$ till ekvationen är på formen $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$.

Lösning: Se bevis av sats 3.2.4 på sidorna 149-150 i B-DP.