REGLERTEKNIK

KTH

REGLERTEKNIK AK EL1000/EL1110/EL1120

Kortfattade lösningsförslag till tentamen 2015–01–17, kl. 9.00–14.00

1. (a) Eftersom $G(s)$ är asymptotiskt stabilt kan vi använda slutvärdessatsen. Statiska förstärkningen är $G(0) = 10$ enligt Bodediagrammet, och därför blir $y(t) = 10$ för stora t. Eftersom $G(s)$ har en resonanstopp förväntar vi oss en översläng i stegsvaret.

   (b) i. Insignalens vinkelfrekvens är $\omega = 0.1$ rad/s, och vi läser av $|G(i0.1)| \approx 70$ och $\arg G(i0.1) \approx -45^\circ = -\frac{45}{180}\pi$ rad. Alltså blir stationära utsignalen $y_1(t) = 70\sin(0.1t - 0.785)$.

   ii. Insignalen $u_2(t)$ har vinkelfrekvensen $\omega = 10$ rad/s. Vi läser av $|G(i10)| \approx 0.02$ och $\arg G(i10) \approx -217^\circ = -\frac{217}{180}\pi$ rad. Eftersom systemet är linjärt kan vi använda superpositionsprincipen, och totala utsignalen blir $70\sin(0.1t - 0.785) + 0.02\sin(10t - 3.79)$.

   (c) i. $K = 1$: $\omega_c \approx 1$ rad/s, $\varphi_m \approx 62^\circ$, och $A_m \approx 1/0.1 = 10$. $K = 5$: $\omega_c \approx 3.3$ rad/s, $\varphi_m \approx 22^\circ$, och $A_m \approx 1/0.5 = 2$.

   ii. Fallen $K = 1$ och $K = 5$ har positiv fasmarginal (och amplitudmarginal större än 1). Enligt förenklade Nyquistkriteriet är då $G_c(s)$ asymptotiskt stabilt. $G(s)$ har amplitudmarginal 10 och vi måste välja $K < 10$ för att ha ett stabilt $G_c(s)$. Alltså är $G_c(s)$ instabilt då $K = 50$.

2. (a) Om $\alpha = 1$ så gäller

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

och styrbarhetsmatrisen blir

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

och

$$\det(\mathcal{C}) = 0.$$

Systemet är är inte styrbart.

   (b) Om $\alpha = 2$ så gäller

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

och styrbarhetsmatrisen blir

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

och

$$\det(\mathcal{C}) = -2 \neq 0.$$

Systemet är är styrbart och slutna systemets poler kan läggas var som helst. Med vektorn $L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}$ fås

$$A - BL = \begin{pmatrix} -l_1 & 1 - l_2 \\ 2 + 2l_1 & 2l_2 \end{pmatrix},$$

och karakteristiska ekvationen blir

$$\det(sI - (A - BL)) = s^2 + (l_1 - 2l_2)s + 2l_2 - 2l_1 - 2 = 0,$$

vilket ska jämföras med den önskade formen

$$(s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2 = 0.$$

Lösning av de uppkomna ekvationerna $l_1 - 2l_2 = 3$ och $2l_2 - 2l_1 - 2 = 2$ ger $l_1 = -7$ och $l_2 = -5$.

(c) Vi har

$$A - BL = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ -18 & -14 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad B_v = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De efterfrågade överföringsfunktionerna ges av

$$G_r(s) = C(sI - A + BL)^{-1}B = \frac{s-2}{(s+2)^2}$$
$$G_v(s) = C(sI - A + BL)^{-1}B_v = \frac{-0.5s + 1}{(s+2)^2}.$$

Med framkopplingsfilter fås den totala överföringsfunktionen från störsignal till utsignal genom

$$Y(s) = [G_r(s)F_f(s) + G_v(s)]V(s). \tag{1}$$

Man ser att med valet $F_f(s) = -\dfrac{G_v(s)}{G_r(s)} = 0.5$ blir denna överföringsfunktion 0 och inverkan av störsignalen elimineras.

3. (a) Karakteristiska ekvationen ges av $1+F_{PD}(s)G(s)=0 \Rightarrow s^2+2(1+K_D)s+2=0$. Vi har alltså polynomen $P(s)=s^2+2s+2$ och $Q(s)=2s$.

Slutna systemets poler är rötterna till $s^2+2(1+K_D)s+2=0$, vilket ger

$$s=-1-K_D \pm \sqrt{(1+K_D)^2-2}, \tag{2}$$

som funktion av K_D.

Rotorten kan fås direkt genom att plotta (2) som funktion av K_D i komplexa talplanet. Alternativt använder man regler för ritning av rotort:

Eftersom vi har två rötter har rotorten två grenar som börjar i $P(s)=0 \Leftrightarrow s=-1\pm i$ för $K_D=0$. En gren slutar i $Q(s)=0 \Leftrightarrow s=0$ och en gren har en asymptot med riktningen π, då $K_D\to\infty$. (Se Resultat 3.1 och 3.2 i Glad & Ljung.)

Eftersom karakteristiska ekvationen är av ordning två kan den skrivas på formen $s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2=0$, där $\omega_0=\sqrt{2}$ och $\zeta=\dfrac{1+K_D}{\sqrt{2}}$. Då $K_D\in[0,\sqrt{2}-1]$ är $\zeta\in[1/\sqrt{2},1]$ och rötterna ligger på en cirkel av radien $\omega_0=\sqrt{2}$ och rör sig mot negativa realaxeln. Då $K_D=\sqrt{2}-1$ har vi en dubbelrot i $s=-\sqrt{2}$. För $K_D>\sqrt{2}-1$ delar sig rötterna och går mot sina slutpunker längs realaxeln. Se figur 1. Slutna systemet är alltså asymptotiskt stabilt för alla $0\le K_D<\infty$.

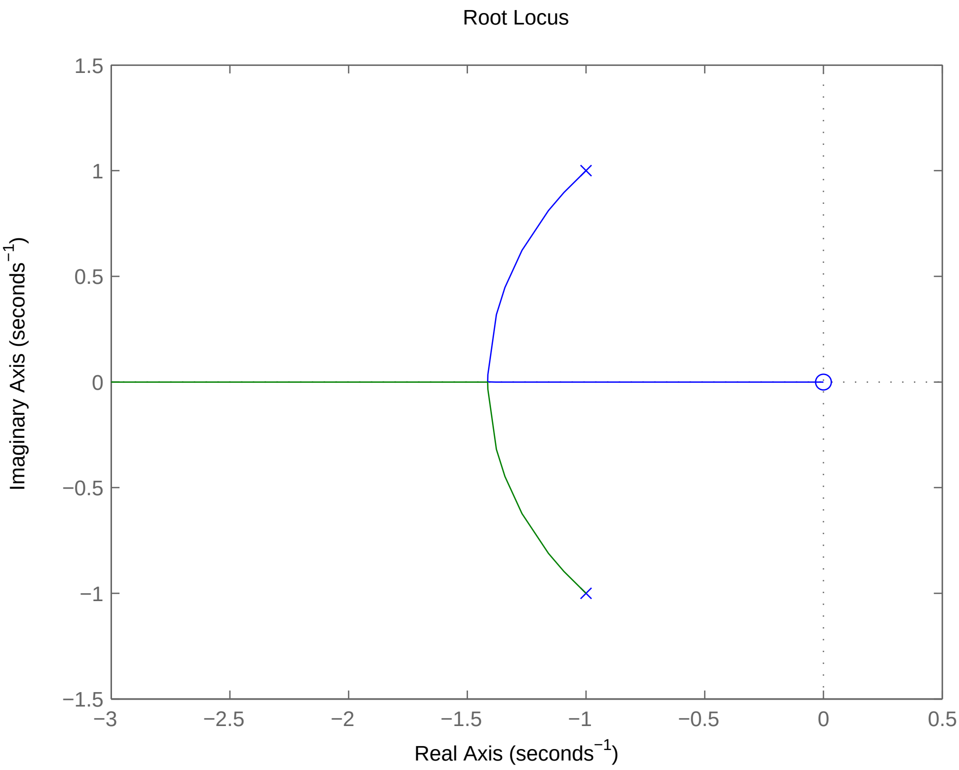
(b) Karakteristiska ekvationen ges av $1+F_{PI}(s)G(s)=0 \Rightarrow s^3+2s^2+2s+2K_I=0$, och $P(s)=s(s^2+2s+2)$ och $Q(s)=2$. Rotorten har tre grenar som börjar i $s=0$ och $s=-1\pm i$ för $K_I=0$. Negativa realaxeln till vänster om $s=0$ tillhör rotorten, eftersom bara en start- och slutpunkt finns på realaxeln (i $s=0$). Då $K_I\to\infty$ rör sig rötterna mot tre asymptoter med riktningarna $\dfrac{\pi}{3}+2k\dfrac{\pi}{3}$, $k=0,1,2$. Asymptoterna sammanstrålar i punkten $s=-\dfrac{2-0}{3}=-\dfrac{2}{3}$. (Se Resultat 3.1 och 3.2 i Glad & Ljung.)

Två av rötterna kommer alltså bli instabila för tillräckligt stora K_I. Vi kan hitta exakta skärningspunkten med imaginäraxeln genom att ansätta lösningar på formen $s=i\omega$:

$$\begin{aligned}
&(i\omega)^3+2(i\omega)^2+2i\omega+2K_I=0\\
&\Leftrightarrow i\omega(-\omega^2+2)=0 \text{ och } -2\omega^2+2K_I=0\\
&\Leftrightarrow (\omega=0, K_I=0) \text{ eller } (\omega=\pm\sqrt{2}, K_I=2).
\end{aligned}$$

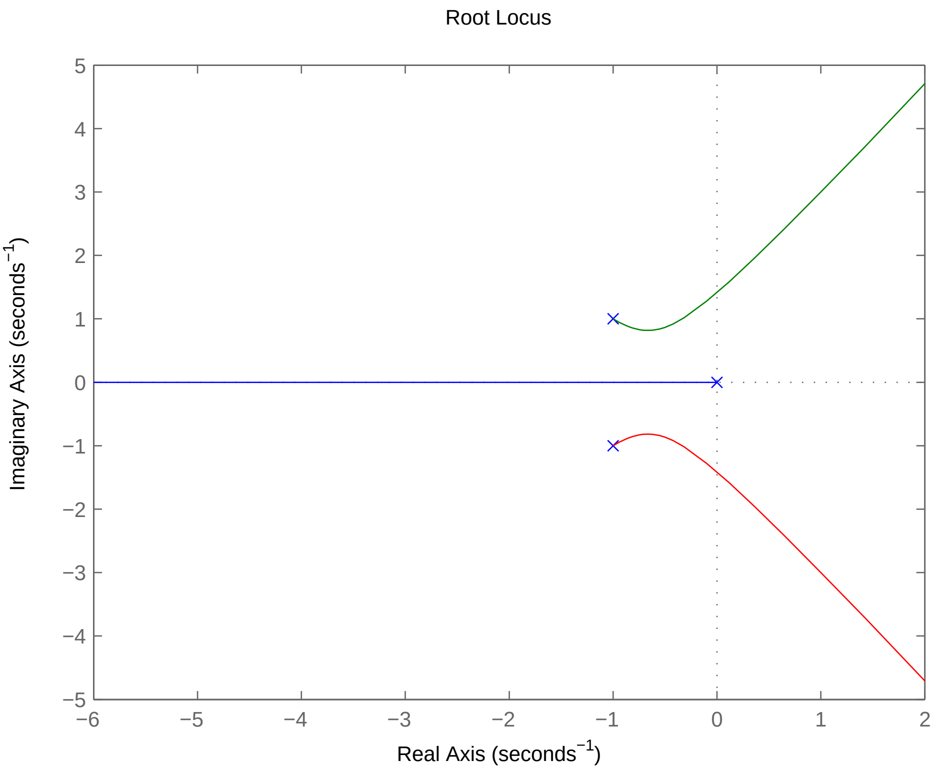
Punkten $(\omega=0, K_I=0)$ är en av startpunkterna som vi redan hittat. Tillsammans med punkterna $(\omega=\pm\sqrt{2}, K_I=2)$ visar det att slutna systemet är asymptotiskt stabilt för $0<K_I<2$. Hela rotorten visas i figur 2. För full poäng räcker det att rotorten indikerar vad som räknats ut ovan.

(I själva verket försvinner polen i $s=0$ då $K_I=0$, så slutna systemet är asymptotiskt stabilt för $0\le K_I<2$. Man kan även övertyga sig om att de



Figur 1: Rotort för uppgift 3-(a).

två komplexa grenarna av rotorten aldrig skär realaxeln genom att studera hur många reella rötter $s = \sigma$ som finns till ekvationen $f(\sigma) = \sigma^3 + 2\sigma^2 + 2\sigma = -2K_I$. Man ser att $f(-\infty) = -\infty$, $f(\infty) = +\infty$ och att $f'(\sigma) > 0$ för alla σ. Funktionen $f(\sigma)$ är strängt växande och ekvationen $f(\sigma) = -2K_I$ har bara en reell rot, oavsett vad K_I är. Dessa uträkningar behöver inte göras för full poäng.)



Figur 2: Rotort för uppgift 3-(b).

4. (a) Skärfrekvensen ω_c ges av $|FG(i\omega_c)| = 1$ och fasmarginalen av $\varphi_m = 180° + \arg FG(i\omega_c)$.

Vi har att

$$|FG(i\omega_c)| = \frac{2}{(\sqrt{\omega_c^2+1})^3} = 1 \Rightarrow \omega_c = \sqrt{2^{2/3}-1} \approx 0.77 \text{ rad/s}.$$

Vidare har vi då $F = 2$ att

$$\arg FG(i\omega_c) = \arg G(i\omega_c) = -3\arg(1+i\omega_c) = -3\arctan(\omega_c).$$

Alltså gäller $\varphi_m = 180° - 3\arctan(\sqrt{2^{2/3}-1}) \approx 68°$.

(b) Låt oss beteckna kretsförstärkningen med $G_o(s) = F(s)G(s)$. För att uppfylla specifikationen i. måste vi ha $G_o(0) = \infty$, det vill säga integralverkan i regulatorn (se t.ex. sidan 62 i Glad & Ljung). Vi ansätter alltså ett lagfilter som ger detta:

$$F_{\text{lag1}}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma_1},$$

med $\gamma_1 = 0$ och $\tau_I = 10/\omega_c \approx 13.0$ s (enligt tumregeln). För att uppfylla specifikationen ii. behöver vi ytterligare förstärkning vid låga frekvenser, så vi lägger till ett lagfilter:

$$F_{\text{lag2}}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma_2},$$

där vi bestämmer γ_2 nedan och väljer τ_I som ovan enligt tumregeln. Med två lagfilter och detta val av τ_I kommer fasmarginalen totalt sänkas med c:a $6° + 6° = 12°$. Enligt specifikationen iii. ska fasmarginalen vara den samma som med $F = 2$, så vi måste höja fasen med en lead-länk,

$$F_{\text{lead}}(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1},$$

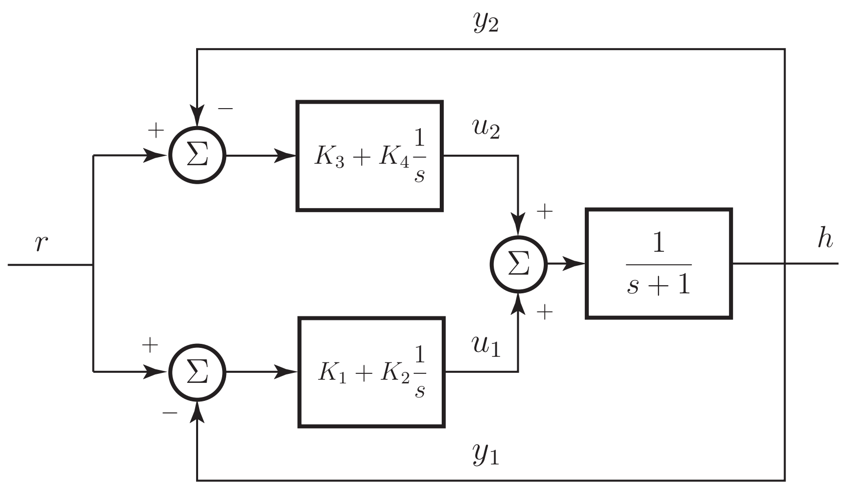
där vi väljer $\beta = 0.65$ vilket ger ett faslyft på c:a 12°. Vi väljer också $\tau_D = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}} \approx 1.62$ s. För att bestämma K använder vi att $|G(i\omega_c)| = 0.5$ och att $|F_{\text{lag1}}(i\omega_c)| \approx |F_{\text{lag2}}(i\omega_c)| \approx 1$ med vårt val av τ_I. Alltså gäller

$$|(F_{\text{lag1}}F_{\text{lag2}}F_{\text{lead}}G)(i\omega_c)| \approx 0.5K/\sqrt{\beta} = 1,$$

vilket ger $K \approx 1.61$.

Det återstår att betsämma γ_2. Enligt t.ex. sidan 62 i Glad & Ljung vet vi att statiska rampfelet då $G_o(s)$ har en integrator och slutna systemet är asymptotiskt stabilt (vilket gäller här) ges av

$$\lim_{t\to\infty}[t - y(t)] = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sF_{\text{lag1}}(s)F_{\text{lag2}}(s)F_{\text{lead}}(s)G(s)} = \frac{\tau_I\gamma_2}{K} = 0.1.$$



Figur 3: Blockschema i uppgift 5-(a).

Denna ekvation har lösningen $\gamma_2 \approx 0.0124$.
Totala regulatorn ges av

$$F(s) = \frac{13.0s + 1}{13.0s} \frac{13.0s + 1}{13.0s + 0.0124} \frac{2.61s + 1.61}{1.05s + 0.0124}.$$

5. (a) Se figur 3.

   (b) Eftersom båda regulatorerna har samma insignal ($r - y_1 = r - y_2 = r - h$), ges regulatorns totala överföringsfunktion av

$$U_1(s) + U_2(s) = \left(K_1 + K_3 + (K_2 + K_4)\frac{1}{s}\right)(R(s) - H(s)).$$

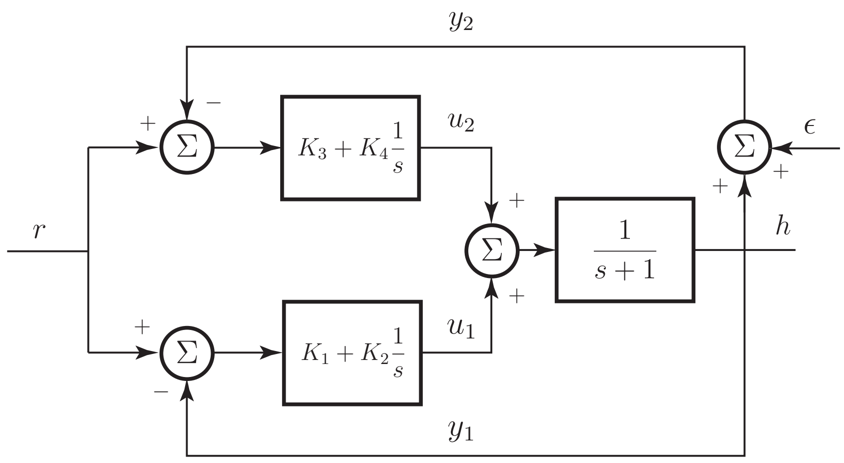
Slutna systemet får då överföringsfunktionen

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\frac{1}{s+1}\left(K_1 + K_3 + (K_2 + K_4)\frac{1}{s}\right)}{1 + \frac{1}{s+1}\left(K_1 + K_3 + (K_2 + K_4)\frac{1}{s}\right)} R(s) \\ &= \frac{K_2 + K_4 + (K_1 + K_3)s}{s^2 + (1 + K_1 + K_3)s + K_2 + K_4} R(s). \end{aligned} \tag{3}$$

Slutna systemet har alltså två poler, som båda ska läggas i $s = -2$ enligt problemställningen. Nämnarpolynomet i (3) ska alltså göras lika med $(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$, vilket gör att regulatorparametrarna ska väljas så att

$$\begin{aligned} K_1 + K_3 &= 3 \\ K_2 + K_4 &= 4. \end{aligned}$$

Parametrarna är alltså inte entydigt valda.



Figur 4: Blockschema i uppgift 5-(c).

(c) Se figur 4 för systemet med mätstörning ϵ.

Då $\epsilon = 0$ har vi att $h = r$ och $u_1 + u_2 = h = r$ för stora t (i det stationära tillståndet) enligt (3).

För att se inverkan av $\epsilon \neq 0$ beräknar vi överföringsfunktionen från ϵ till h. Från figur 4 ställer vi upp följande ekvation för $H(s)$,

$$H = \frac{1}{s+1}\left[-\left(K_3 + K_4\frac{1}{s}\right)(H+\epsilon) - \left(K_1 + K_2\frac{1}{s}\right)H\right]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$H = \underbrace{-\frac{K_3 s + K_4}{s^2 + (1 + K_1 + K_3)s + K_2 + K_4}}_{G_{h\epsilon}(s)}\epsilon.$$

$G_{h\epsilon}(s)$ är asymptotiskt stabil om vi väljer $K_1 + K_3 > -1$ och $K_2 + K_4 > 0$, vilket vi gjorde i (b), och vi kan då räkna ut slutvärdet då ϵ är konstant som

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = r + \lim_{s\to 0} sG_{h\epsilon}(s)\frac{\epsilon}{s} = r - \frac{K_4}{K_2 + K_4}\epsilon.$$

De statiska reglerfelen för de två regulatorerna blir alltså

$$\lim_{t\to\infty}[r - y_1(t)] = \lim_{t\to\infty}[r - h(t)] = \frac{K_4}{K_2 + K_4}\epsilon$$

$$\lim_{t\to\infty}[r - y_2(t)] = \lim_{t\to\infty}[r - h(t) - \epsilon] = -\frac{K_2}{K_2 + K_4}\epsilon.$$

Från regulatorernas PI-dynamik följer att då $t \to \infty$ gäller

$$
\begin{aligned}
u_1(t) &= \frac{K_1 K_4}{K_2 + K_4}\epsilon + K_2 \int_0^t [r(\tau) - y_1(\tau)]\, d\tau \to C_1 + \frac{K_2 K_4}{K_2 + K_4}\epsilon t \\
u_2(t) &= -\frac{K_2 K_3}{K_2 + K_4}\epsilon + K_4 \int_0^t [r(\tau) - y_2(\tau)]\, d\tau \to C_2 - \frac{K_2 K_4}{K_2 + K_4}\epsilon t,
\end{aligned}
$$

där C_1 och C_2 är konstanter som beror på initialtillstånd som är okända för oss. Om vi godtyckligt antar att $\frac{K_2 K_4}{K_2+K_4}\epsilon > 0$ kommer alltså insignalen $u_1(t)$ att växa linjärt med tiden tills den slår i en övre gräns (max pumpkapacitet för Pump 1). Samtidigt minskar $u_2(t)$ i motsvarande linjära takt tills den når sin lägsat nivå (Pump 2 stannar). Vätskenivån kommer alltså att vara konstant lika med $r - \frac{K_4}{K_2+K_4}\epsilon$ tills endera av pumparna når sin gräns. Dessa slutsatser ger full poäng.

(Eftersom det enligt uppgiften inte räckte med en pump för att hålla önskad nivå kan man anta att det ovan är Pump 1 som först slår i sin gräns. Om då t.ex. $\frac{K_4}{K_2+K_4}\epsilon > 0$ så kommer dess regulator att fastna i maxläget och regulatorn för Pump 2 med mätfelet ϵ tar över och styr om nivån till $r - \epsilon$. Detta var troligen inte ett önskat beteende från ingenjörens sida.)