

REGLERTEKNIK

KTH

REGLERTEKNIK AK EL1000/EL1110/EL1120

Kortfattade lösningsförslag till tentamen 2015–04–08, kl. 8.00–13.00

1. (a) Signalen u_1 har vinkelfrekvens $\omega = 0.1$ rad/s, och vi läser av $|G(i0.1)| \approx 35$ och $\arg G(i0.1) \approx -45^\circ = -\frac{45}{180}\pi$ rad. Signalen $u_2(t)$ har vinkelfrekvensen $\omega = 1$ rad/s och vi läser av $|G(i1)| \approx 0.5$ och $\arg G(i1) \approx -117^\circ = -\frac{117}{180}\pi$ rad. Eftersom $G(s)$ är asymptotiskt stabilt kommer den stationära utsignalen bli $y(t) = 35 \sin(0.1t - 0.785) + 0.5 \cos(t - 2.042)$.
 - (b) i. $K = 1$: Skärfrekvensen är $\omega_c \approx 0.51$ rad/s ($|G(i\omega_c)| = 1$) varvid $\varphi_m \approx 70^\circ$, och fas-skärfrekvensen är $\omega_p \approx 5$ rad/s varvid $A_m \approx 1/0.05 = 20$.
 $K = 5$: Skärfrekvensen är $\omega_c \approx 2.1$ rad/s ($|G(i\omega_c)| = 1/5$) varvid $\varphi_m \approx 45^\circ$, och fas-skärfrekvensen är $\omega_p \approx 5$ rad/s varvid $A_m \approx 1/0.05/5 = 4$.
 - ii. Eftersom öppna systemet $G(s)$ har amplitudmarginal 20 kommer slutna loopen vara asymptotiskt stabil för $K = 10$, och vi kan använda slutvärdesteoremet. Vi har $\frac{KG(0)}{1 + KG(0)} = \frac{10 \cdot 5}{1 + 10 \cdot 5} = 50/51$, vilket blir slutvärdet för $y(t)$.
 - iii. Kompenserade öppna loopen $KG(s)$ har ökande skärfrekvens och fallande fasmarginal för ökande K . Alltså ökar motsvarande slutna systems bandbredd och resonanstopp med K . Vi har A: $K = 10$, B: $K = 5$, C: $K = 1$.
2. (a) Om $\alpha = 1$ så gäller

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad -1)$$

och observerbarhetsmatrisen blir

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

och

$$\det(\mathcal{O}) = 0.$$

Systemet är inte observerbart.

- (b) Om $\alpha = 2$ så gäller

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad -2).$$

Med vektorn $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ fås

$$A - KC = \begin{pmatrix} -k_1 & 2 + 2k_1 \\ 1 - k_2 & 2k_2 \end{pmatrix},$$

och karakteristiska ekvationen blir

$$\det(sI - (A - KC)) = s^2 + (k_1 - 2k_2)s - 2k_1 + 2k_2 - 2 = 0,$$

vilket ska jämföras med den önskade formen

$$(s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16 = 0.$$

Lösning av de uppkomna ekvationerna $k_1 - 2k_2 = 8$ och $2k_2 - 2k_1 - 2 = 16$ ger $k_1 = -26$ och $k_2 = -17$.

(c) Om vi låter $\tilde{r} = l_0 r$ i formel (9.37)–(9.38) i kursboken får vi

$$Y(s) = G_c(s)\tilde{R}(s) = C(sI - A + BL)^{-1}Bl_0R(s) = G_r(s)R(s).$$

(Notera att $G_c(s)$ och $G_r(s)$ är oberoende av K .) För att lägga polerna i $G_r(s)$ enligt specifikation (i) ska alltså egenvärdena till $A - BL$ läggas i $\{-2, -2\}$. Med $L = [l_1 \quad l_2]$ får vi:

$$A - BL = \begin{pmatrix} -l_1 & 2 - l_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

och $\det(sI - A + BL) = s^2 + l_1s + l_2 - 2$ ska jämföras med $(s + 2)^2 = s^2 + 4s + 4$. Detta ger $l_1 = 4$ och $l_2 = 6$.

För att uppfylla specifikationen (ii) löser vi ekvationen

$$G_r(0) = C(-A + BL)^{-1}Bl_0 = 1,$$

med L ovan insatt. Detta ger $-0.5l_0 = 1$, det vill säga $l_0 = -2$.

3. (a) Det gäller att $\arg KG(i\omega) = \arg G(i\omega)$ då $K > 0$. Från bodediagrammet ser man att $\arg G(i1) = -135^\circ$. Maximal skärfrekvens för $KG(i\omega)$ med en fasmarginal om minst $\varphi_m = 45^\circ$ är alltså $\omega_c = 1$ rad/s. (För att uppnå denna maximala skärfrekvens ska man välja $K = 1/|G(i1)| = 2^{3/2} \approx 2.83$.)
- (b) Vi börjar med specifikationerna (ii) och (iii). Slutna systemet ska vara fyra gånger snabbare än det i deluppgift (a). Detta ger önskad skärfrekvens $\omega_{c,d} = 4$ rad/s. Eftersom $\arg G(i4) = -3 \arctan(\omega_{c,d}) \approx -228^\circ$ (alternativt läser man av detta i bodediagrammet) och vi vill ha $\varphi_m = 45^\circ$ måste vi höja fasan med $-135^\circ - (-228^\circ) = 93^\circ$. För att kompensera för den extra fasförlust som uppstår i samband med uppfyllandet av specifikation (i) lägger vi till 6° extra. Totalt behövs alltså c:a 99° fasavancering. Detta kan vi dela upp på två lead-länkar

$$F_{\text{lead}}(s) = K \frac{(\tau_D s + 1)^2}{(\beta \tau_D s + 1)^2},$$

genom att välja $\beta = 0.135$ (49.6° på vardera länk enligt ekv.(5.4)/figur 5.13 i kursboken). Parametern τ_D väljs som $\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} \approx 0.68$ s. För att uppfylla kravet på snabbhet väljs K enligt

$$1 = |F_{\text{lead}}(i\omega_{c,d})G(i\omega_{c,d})| = \frac{K}{\beta} \frac{1}{|1 + i\omega_{c,d}|^3} = \frac{K}{0.135 \cdot 17^{3/2}}.$$

Detta ger $K \approx 9.46$.

För att uppfylla specifikationen (i) lägger vi till en lag-länk,

$$F_{\text{lag}}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}.$$

För att inte minska fasan mer än 6° väljes $\tau_I = 10/\omega_{c,d} = 2.5$ s. Totala krets förstärkningen är nu $G_o(s) = F_{\text{lag}}(s)F_{\text{lead}}(s)G(s)$ och slutna loopen är asymptotiskt stabil enligt analysen ovan (fasmarginal om 45°). Enligt t.ex. sidan 62 i kursboken vet vi att statiska reglerfelet då referensen är ett steg då blir

$$e_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - y(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_o(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + G_o(0)} = \frac{1}{1 + KG(0)/\gamma}.$$

Detta uttryck är noll endast om $\gamma = 0$, det vill säga att regulatorn har integralverkan.

Totala kompenseringslänken blir nu

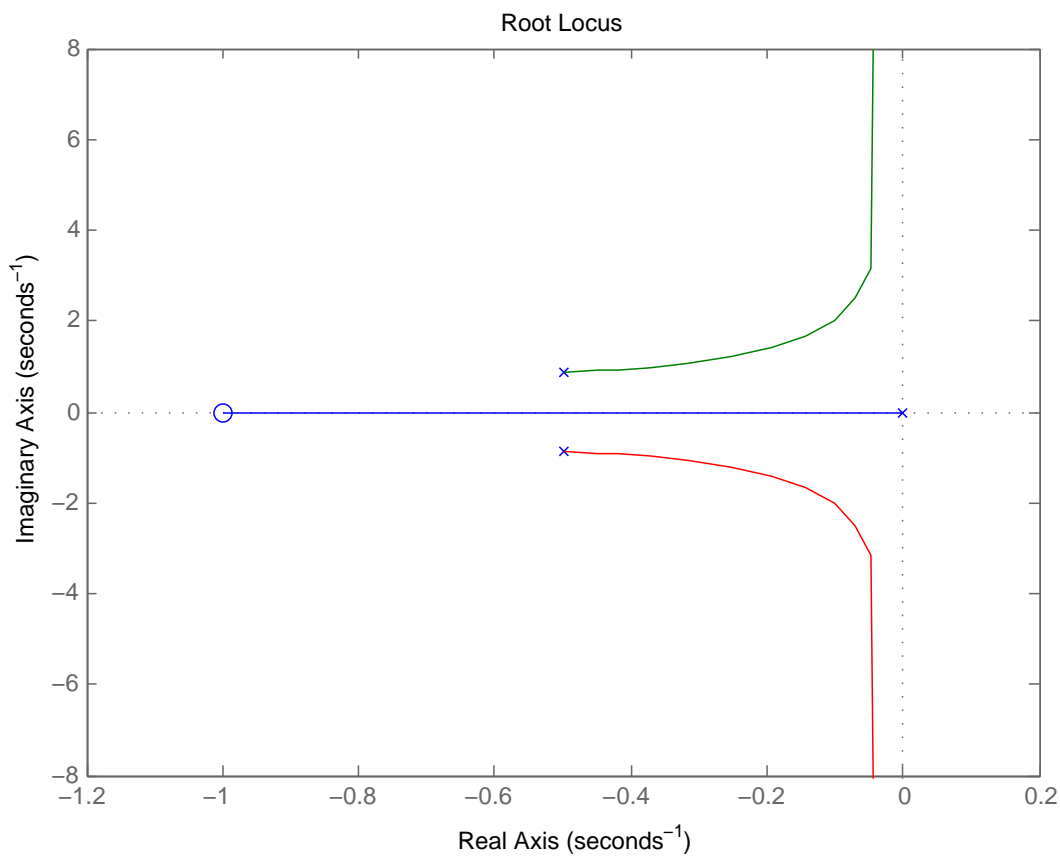
$$F(s) = F_{\text{lead}}(s)F_{\text{lag}}(s) = 9.46 \frac{(0.68s + 1)^2}{(0.092s + 1)^2} \frac{2.5s + 1}{2.5s}.$$

4. (a) Karakteristiska ekvationen ges av $1 + F(s)G^0(s) = 0 \Rightarrow s^3 + s^2 + s + g(s+1) = 0$, och $P(s) = s(s^2 + s + 1)$ och $Q(s) = s + 1$. Rotorten har tre grenar som börjar i $s = 0$ och $s = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ för $g = 0$ ($P(s) = 0$). Rotorten har en slutpunkt i $s = -1$ ($Q(s) = 0$) och följaktligen två asymptoter.

Då $g \rightarrow \infty$ har de två asymptoter riktningarna $\frac{\pi}{3-1} + 2k\frac{\pi}{3-1}$, $k = 0, 1$, alltså $\pi/2$ och $3\pi/2$. Asymptoterna sammanstrålar i punkten $s = -\frac{1-1}{3-1} = 0$. (Se Resultat 3.1 i kursboken.)

Negativa realaxeln mellan startpunkten $s = 0$ och slutpunkten $s = -1$ tillhör rotorten (Resultat 3.2 i kursboken).

För att avgöra om rotorten någon gång passerar stabilitetsgränsen försöker vi hitta skärningspunkter med imaginäraxeln. Vi ansätter lösningar på formen $s =$



Figur 1: Rotort för uppgift 4-(a).

$i\omega$:

$$\begin{aligned} (i\omega)^3 + (i\omega)^2 + i\omega + g(i\omega + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow i\omega(-\omega^2 + 1 + g) = 0 \text{ och } -\omega^2 + g &= 0 \\ \Leftrightarrow \omega = 0 \text{ och } g = 0. \end{aligned}$$

Denna punkt är en av startpunkterna som vi redan hittat. Slutna systemet är alltså asymptotiskt stabilt för all $g > 0$, och hela rotorten visas i figur 1.

(b) Den relativa modellosäkerheten ges av

$$\Delta_G(s) = \frac{G^0(s) - G(s)}{G(s)} = \frac{9 - g}{s^2 + g},$$

och den nominella modellen av slutna systemet är

$$T(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{s}{s^3 + s^2 + 10s + 9}.$$

Enligt analysen i deluppgift (a) vet vi att nominella systemet $T(s)$ är asymptotiskt stabilt. Eftersom både $G(s)$ och $G^0(s)$ har samma antal poler i högra halvplanet och båda går mot noll då $|s|$ går mot oändligheten så kan vi använda Robusthetskriteriet.

Robusthetskriteriet säger att även loopnen sluten med $G^0(s)$ är asymptotiskt stabil om

$$|\Delta_G(i\omega)| < \frac{1}{|T(i\omega)|} \quad \text{för alla } \omega. \quad (1)$$

Problemet är att då $g \neq 9$ så har $\Delta_G(s)$ två poler på imaginära axeln i punkterna $i\omega_p = \pm i\sqrt{g}$. Eftersom $\Delta_G(i\omega_p)$ är oändlig och $1/T(i\omega_p)$ är ändlig kommer olikheten i (1) aldrig vara uppfylld för $\omega = \omega_p$. Robusthetskriteriet garanterar alltså inte asymptotisk stabilitet för något fall då $g \neq 9$ (alltså då g avviker från nominella fallet och $\Delta_G(s) \neq 0$).

- (c) Robusthetskriteriet är bara ett *tillräckligt* villkor för asymptotisk stabilitet. Slutna systemet kan vara asymptotiskt stabilt även om villkoret inte är uppfyllt, vilket är fallet här enligt analysen i deluppgift (a).

5. (a) i. Med de införda tillstånden fås

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + u_1 + u_2 \\ u_1 &= K_1(r - y_1) + K_2x_2 = K_1(r - x_1 - m_1) + K_2x_2 \\ u_2 &= K_3(r - y_2) + K_4x_3 = K_3(r - x_1 - m_2) + K_4x_3 \end{aligned}$$

Analysens huvudsats ger även att

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= r - y_1 = r - x_1 - m_1 \\ \dot{x}_3 &= r - y_2 = r - x_1 - m_2. \end{aligned}$$

Tillsammans kan detta skrivas på formen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_r r(t) + B_{m_1} m_1(t) + B_{m_2} m_2(t) \\ y_1(t) &= C_1 x(t) + m_1(t) \\ y_2(t) &= C_2 x(t) + m_2(t), \end{aligned}$$

med $x = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$ och

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 - K_1 - K_3 & K_2 & K_4 \\ & -1 & 0 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ B_r &= \begin{pmatrix} K_1 + K_3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_{m_1} = \begin{pmatrix} -K_1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{m_2} = \begin{pmatrix} -K_3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ C_1 &= C_2 = (1 \ 0 \ 0). \end{aligned}$$

ii. För att undersöka styrbarheten av systemet

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_r r(t)$$

kan man t.ex. studera inverterbarheten av matrisen

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= [B_r \quad AB_r \quad A^2B_r] \\ &= \begin{pmatrix} K_1 + K_3 & \star & \star \\ 1 & -K_1 - K_3 & -(1 + K_1 + K_3)(K_1 + K_3) + K_2 + K_4 \\ 1 & -K_1 - K_3 & -(1 + K_1 + K_3)(K_1 + K_3) + K_2 + K_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

där \star indikerar element vars exakta utseende inte spelar roll för diskussionen här. Man ser att raderna 2 och 3 i \mathcal{S} är identiska och därför gäller $\det(\mathcal{S}) = 0$. Systemet är alltså *inte* styrbart.

(En alternativ lösning är att notera att här gäller $\dot{x}_2 = r - x_1 = \dot{x}_3$, och vi kan uppenbarligen inte styra isär x_2 och x_3 på valfritt sätt med hjälp av r , vilket är ett krav för styrbarhet.)

- (b) Den nya styrlagen behöver inte tillståndet x_3 för att realiseras. En tillståndsmodell för det återkopplade systemet är då

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + u_1 + u_2 \\ u_1 &= K_1(r - y_1) + K_2x_2 = K_1(r - x_1 - m_1) + K_2x_2 \\ u_2 &= K_3(r - y_1) + K_4x_2 = K_2(r - x_1 - m_2) + K_4x_2. \end{aligned}$$

Detta kan på skrivas på formen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_r r(t) + B_{m_1} m_1(t) \\ y_1(t) &= C_1 x(t) + m_1(t) \end{aligned}$$

med $x = (x_1 \quad x_2)^T$ och

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 - K_1 - K_3 & K_2 + K_4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ B_r &= \begin{pmatrix} K_1 + K_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_{m_1} = \begin{pmatrix} -K_1 - K_3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = (1 \quad 0). \end{aligned}$$

För att undersöka styrbarheten av systemet kan man t.ex. studera inverterbarheten av matrisen

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= [B_r \quad AB_r] \\ &= \begin{pmatrix} K_1 + K_3 & -(1 + K_1 + K_3)(K_1 + K_3) + K_2 + K_4 \\ 1 & -K_1 - K_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eftersom $\det(\mathcal{S}) = K_1 + K_3 - K_2 - K_4$ ser vi att slutna systemet är styrbart från r då vi väljer $K_1 + K_3 - K_2 - K_4 \neq 0$, vilket är enkelt att uppfylla. Detta är i kontrast mot deluppgift (a)-ii där slutna systemet inte är styrbart för något val av K_1, K_2, K_3, K_4 .

Ett problem med det icke-styrbara tillståndet i deluppgift (a)-ii illustrerades i lösningen till uppgift 5 (c) i tentan 2015-01-17, där pumparnas tillflöden okontrollerbart drevs isär på grund av mätbrus.

Anledningen till att man kan få ett icke-styrbart tillstånd även i denna deluppgift är att PI-regulatorn har ett nollställe i $(K_1 + K_3)s + (K_2 + K_4) = 0$, vilket förkortar bort tankens pol i $s = -1$ då $K_1 + K_3 = K_2 + K_4$.