SF1661 Perspektiv på matematik
Tentamen 23 oktober 2015 kl 08.00 – 13.00

Skrivtid: 5 timmar
Inga tillåtna hjälpmedel
Examinator: Hans Thunberg

Tentamen består av nio uppgifter som var och en ger maximalt fyra poäng. För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del I, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses.

Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

Uppgifterna 4 – 6 utgör del II. De tre sista uppgifterna utgör del III. För betygen A och B krävs ett visst antal poäng på del III.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

Dessa poänggränser är preliminära och kan komma att justeras.

Del I

(1) De naturliga talen n och m ges i bas 5 av att $n = (123)_5$ och $m = (40)_5$. Beräkna produkten nm och uttryck produkten i såväl bas 5 som bas 10.

(2) a) Är det sant att

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

för alla $n \in \mathbb{Z}_+$ och alla $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$?

b) Är det sant att

$$\sum_{k=1}^{n} (x + k) = \frac{n(n + 2x + 1)}{2}$$

för alla $n \in \mathbb{Z}_+$ och alla $x \in \mathbb{R}$?

Bevisa dina påståenden!

(3) Beräkna och skriv på så enkel form som möjligt

(a) $\sqrt[3]{8^4} - \left(\sqrt[4]{2}\right)^{12}$ (b) $\dfrac{\log_3 27 - \log_3 9}{\log_3 81}$

(c) $(i)^{-1}(2 + 3i) - \dfrac{13}{3 + 2i}$ (där $i^2 = -1$) (d) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\dfrac{-4\pi}{3}\right)$

Del II

(4) a) Bestäm heltal m och n sådana att kvoten $\frac{m}{n}$ har den periodiska decimalbråksutvecklingen

$$\frac{m}{n} = 2.412412\ldots$$

eller förklara varför detta inte är möjligt. (2 p)

b) Förklara varför alla rationella tal har ändlig eller periodisk decimalbråksutveckling. Du kan använda dig av ett exempel, men ska förklara varför detta gäller alla rationella tal.

(2 p)

(5) a) Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $|x-3| = |2x+6|$. (2 p)

b) Bestäm alla reella lösningar till olikheten $x^2 - x + 1 < \dfrac{1}{x}$. (2 p)

(6) Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen

$$z^2 - 2z + 3 - i2\sqrt{3} = 0.$$

Del III

(7) Låt f vara funktionen $f : D_f = [0, \infty) \to V_f$, $f(x) = \ln(x^2 + e)$.

a) Visa att f är injektiv. (1 p)

b) Bestäm värdemängden V_f. (1 p)

c) Bestäm den inversa funktionen f^{-1}. (2 p)

(8) a) Formulera Binomialsatsen. (1 p)

b) Bevisa att för alla heltal k och n, $0 \leq k \leq n$, gäller att

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1},$$

där $\binom{n}{k}$ definieras som $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. (3 p)

(9) Låt n vara ett godtyckligt positivt heltal och definera talet

$$p_n = n^3 + 3n^2 + 2n.$$

Bevisa att p_n är delbart med 6 .
