Tentamen 23/10 2015

SF1661 PERSPEKTIV PÅ MATEMATIK

Svar och lösningsförslag

1. Vi söker produkten $n \cdot m$ där $n = (123)_5$ och $m = (40)_5$. Vi skriver upp additions- och multiplikationstabeller i bas 5.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

·	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	11	13
3	3	11	14	22
4	4	13	22	31

Med hjälp av dessa beräknar vi produkten $m \cdot n = (123)_5 \cdot (40)_5 = (11020)_5$

$$
\begin{array}{r}
123 \\
\cdot\ \ 40 \\
\hline
000 \\
+\,1102 \\
\hline
11020
\end{array}
$$

Slutligen omvandlar vi produkten till bas 10.

$$m \cdot n = (11020)_5 = 1 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0$$

$$= (625 + 125 + 10)_{10} = (760)_{10}$$

SVAR: $m \cdot n = (11020)_5 = (760)_{10}$

(2)

a) Nej, t.ex ger $x=0$ att

$$V.L = \sum_{k=1}^{n} 0^k = 0 \quad \text{och} \quad H.L. = \frac{0^n - 1}{0 - 1} = 1$$

b) Ja.

Bevis: Sätt $S = \sum_{k=1}^{n} (x+k)$.

Vi adderar $S+S$ men grupperar termerna enligt nedan och adderar ledvis

$$S = (x+1) + (x+2) + \ldots + (x+n-1) + (x+n)$$

$$+ \; S = (x+n) + (x+n-1) + \ldots + (x+2) + (x+1)$$

$$2S = \underbrace{(2x+n+1) + (2x+n+1) + \ldots + (2x+n+1) + (2x+n+1)}_{n \text{ st.}}$$

Alltså är

$$2S = n(n+2x+1)$$

och $S = \dfrac{n(n+2x+1)}{2}$ V.S.B.

(3.) a) $\sqrt[3]{8^4}-\left(\sqrt[4]{2}\right)^{12} = \left((2^3)^4\right)^{1/3} - \left(2^{1/4}\right)^{12}$

$= 2^{3\cdot 4\cdot 1/3} - 2^{12\cdot 1/4} = 2^4 - 2^3 = 8$

b) $\dfrac{\log_3 27 - \log_3 9}{\log_3 81} = \dfrac{\log_3 \frac{27}{9}}{\log_3 81} =$

$= \dfrac{\log_3 3}{\log_3 3^4} = \dfrac{1}{4}$

c) $(i)^{-1}(2+3i) - \dfrac{13}{3+2i} =$

$= \frac{1}{i}\cdot 2 + 3 - \dfrac{13(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} =$

$= 3 + 2\frac{i}{i\cdot i} - \dfrac{13(3-2i)}{9+4} =$

$= 3 - 2i - (3-2i) = 0$

d) $\sin\frac{5\pi}{6} + \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{4\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3} = 0$

<u>SVAR:</u> a) 8 b) $\frac{1}{4}$ c) 0 d) 0

(4)

a) Eftersom ett reellt tal har periodisk eller ändlig decimalbråksutveckling om och endast om talet är rationellt, finns det heltal m och n sådana att $\frac{m}{n} = 2.412412\ldots$.

Sätt $r = 2,412412\ldots$

$\Rightarrow 1000r = 2412.412412\ldots$

$\Rightarrow 999r = 1000r - r = 2412.412412\ldots - (2.412412\ldots)$
$= 2410$

$\Rightarrow r = \frac{2410}{999}$

Svar: Ta $m = 2410$, $n = 999$, då är $\frac{2410}{999} = 2.412412\ldots$

(4) b) Låt $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, dvs $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

Att skriva $\frac{p}{q}$ på decimalform görs genom att utföra divisionen.

<u>Antingen</u> går divisionen "jämnt upp" och vi får en <u>ändlig</u> decimalbråksutveckling, som i exemplet $\frac{15}{4} = 3{,}75$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0\,3{,}75 \\
\hline
4 & 1\,5{,}00 \\
 & -1\,2 \\
\cline{2-2}
 & \quad 30 \\
 & \quad 28 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 20 \\
 & \qquad 20 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\ 0
\end{array}
$$

rest $= 0$ efter ett ändligt antal steg $\Rightarrow$ ändlig decimalbråksutveckling.

<u>Eller</u> så går divisionen aldrig "jämt upp", i varje steg i divisionsalgoritmen får vi en rest $r \neq 0$. Resten r kan bara ha ändligt många olika värden, $r \in \{1, 2, 3, \ldots (q-1)\}$ vid divisionen $\frac{p}{q}$.

Alltså måste en och samma rest återkomma, efter beräkning av högst q stycken decimaler återkommer en rest och därmed en decimal, och divisionsalgoritmen upprepar sig sedan periodiskt.

Exempel: $\frac{12}{7} = 1{,}714285\ 714285\ldots$

$$
\begin{array}{l}
\quad 0\,1{,}714285\,7 \\
7 \,|\, 12{,}0000000 \\
-7 \\
50 \\
-49 \\
10 \\
-7 \\
30 \\
-28 \\
20 \\
-14 \\
60 \\
-56 \\
40 \\
-35 \\
50 \\
-49 \\
1
\end{array}
$$

Möjliga successiva rester $\neq 0$ är 1, 2, 3, 4, 5, 6. Vid division med 7.

rest 5 återkommer

och decimalbråksutvecklingen börjar upprepa sig periodiskt

(5) a) $|x-3| = |2x+6| \quad (*)$

$(x-3)$ växlar tecken vid $x=3$

$(2x+6)$ växlar tecken vid $x=-3$

Vi undersöker och löser $(*)$ på tre delintervall av $\mathbb{R}$.

$I_1 = (-\infty, -3)$. Om $x \in I_1$

är $(x-3) < 0$ och $(2x+6) < 0$,

så på I_1 är $(*) \Leftrightarrow$

$-(x-3) = -(2x+6) \Leftrightarrow$

$(x-3) = (2x+6) \Leftrightarrow x = -9$

Eftersom $x = -9 \in I_1$ är detta en lösning

$I_2 = [-3, 3)$. Om $x \in I_2$ är

$(x-3) < 0$ och $(2x+6) \geq 0$

så $(*) \Leftrightarrow -(x-3) = (2x+6)$

$\Leftrightarrow -x+3 = 2x+6 \Leftrightarrow 3x = -3$

$\Leftrightarrow x = -1$. Eftersom $x = -1 \in I_2$

är också detta en lösning

$I_3 = [3, \infty)$ Om $x \in I_3$ är

$(x-3) \geq 0$ och $(2x+6) \geq 0$

och $(*) \Leftrightarrow (x-3) = (2x+6) \Leftrightarrow x = -9$

~~som~~ Då $x = -9 \notin I_3$, saknas lösning i I_3

(5) b) $x^2 - x + 1 < \frac{1}{x} \iff$

$x^2 - x + 1 - \frac{1}{x} < 0 \iff$

$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x} < 0 \iff$

$\frac{x^2(x-1) + (x-1)}{x} < 0 \iff$

$\frac{(x-1)(x^2+1)}{x} < 0$

$\iff$
(enligt teckentabell)

$0 < x < 1$

Teckentabell

		0		1	
x	$- - -$	0	$+$	$+$	$+ +$
$x-1$	$- - -$	$-$	$-$	0	$+ +$
(x^2+1)	$+$	$+$	$+$	$+$	$+ + +$
$\frac{(x-1)(x^2+1)}{x}$	$+ +$	ej def.	$- -$	0	$+ + +$

Svar: a) $x = -9$, $x = -1$

b) $0 < x < 1$

(6) $z^2 - 2z + 3 - i2\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$ Kvadrat komplettering

$(z-1)^2 + 2 - i2\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$

$(z-1)^2 = -2 + i2\sqrt{3}$

Sätt $w = z-1$ och lös ekvationen

$w^2 = -2 + i2\sqrt{3}$ genom att

övergå till polär form.

Sätt $w = re^{i\varphi}$, $r > 0$

$|-2 + i2\sqrt{3}| = \sqrt{4 + 4\cdot 3} = 4$

så $-2 + i2\sqrt{3} = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left\{\begin{matrix}\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{matrix}\right\}$

$= 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 4e^{i2\pi/3}$.

Vi vill alltså lösa ekvationen

$w^2 = 4e^{i2\pi/3} \Leftrightarrow r^2e^{i2\varphi} = 4e^{i2\pi/3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 4 \\ 2\varphi = 2\pi/3 + n\cdot 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} r = 2 \\ \varphi = \pi/3 + n\cdot\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \end{matrix}$

som ger två distinkta lösningar:

$n=0$ ger $w_0 = 2e^{i\pi/3} = 2(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3) = 1 + i\sqrt{3}$

$n=1$ ger $w_1 = 2e^{i4\pi/3} = 2(\cos 4\pi/3 + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -1 - i\sqrt{3}$.

Då $z = w + 1$ ger detta två lösningar

SVAR: $z_0 = w_0 + 1 = \underline{2 + i\sqrt{3}}$, $z_1 = w_1 + 1 = \underline{-i\sqrt{3}}$

(7) a) Tag $a, b \in D_f = [0, \infty)$. Då gäller
$a > b \Rightarrow a^2+e > b^2+e \Rightarrow \ln(a^2+e) > \ln(b^2+e)$
där sista steget följer av att ln är en växande funktion.
Så $a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$, så f är växande och därmed injektiv.

b) Eftersom f är växande fås minsta funktionsvärdet för det minsta $x \in D_f$, $f(0) = \ln(0^2+e) = 1$.

Då x växer, växer f(x), och mer precist gäller att
$x \to \infty \Rightarrow (x^2+e) \to \infty \Rightarrow \ln(x^2+e) \to \infty$
Det följer att $V_f = [1, \infty)$

c) Sätt $y = f(x)$, $x \in D_f = [0,\infty)$, $y \in V_f = [1,\infty)$
Vi får att
$y = \ln(x^2+e) \Leftrightarrow e^y = x^2+e$
$\Leftrightarrow x^2 = e^y - e$ (≥ 0 ty $y \geq 1$)
$\Leftrightarrow x = \sqrt{e^y - e}$ (endast positiva roten ty $x \in D_f$, så $x \geq 0$)
Detta ger
<u>SVAR:</u> $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - e}$

8. Se kurslitteraturen:
Johansson-Öhman,
"Introduktion till högre studier i Matematik", sid 89-90

9. $P_n = n^3 + 3n^2 + 2n =$
$= n(n^2 + 3n + 2)$.

Eftersom $x^2 + 3x + 2 = 0$ ~~för~~ $x = -1 \vee x = -2$
är $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$, så

$$P_n = n(n+1)(n+2)$$

Av tre på varandra följande naturliga tal (n, $n+1$, $n+2$) måste minst ett vara delbart med 2 och "ett delbart med 3", alltså är

P_n delbart med både 2 och 3 och därmed med 6. V.S.B.