KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Fredag, 23 oktober 2015

Skrivtid: 08:00–13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Tilman Bauer

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

1. Vi har följande punkter:
$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$
i rummet $\mathbb{R}^3$.
   (a) Bestäm en ekvation för det plan H som går genom origo 0 och genom punkterna A och B. **(2 p)**
   (b) Bestäm en parameterform för linjen l som är ortogonal mot planet H och innehåller punkten $Q = (1, 1, -1)$. **(1 p)**
   (c) Bestäm avståndet mellan punkten Q och planet H. **(1 p)**

2. Låt $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ vara standardbasen till $\mathbb{R}^3$. Betrakta den linjära avbildning $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ som bestäms av
$$F(\vec{e_1}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F(\vec{e_2}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad F(\vec{e_3}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Bestäm $F(\vec{v})$ där $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(1 p)**
   (b) Varför är bildrummet till F hela $\mathbb{R}^2$? **(1 p)**
   (c) Bestäm en bas till bildrummet $\mathrm{Im}(F)$. **(1 p)**
   (d) Bestäm en bas till $\mathrm{Ker}(F)$. **(1 p)**

3. För konstanterna a, b ges avbildningen $L\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, genom
$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax_1 - x_3 \\ x_2 + x_4 \\ x_3 - x_4 \\ bx_1 + x_2 + x_4 \end{bmatrix}.$$
   (a) Använd determinanten för att bestämma alla a, b sådana att L blir inverterbar. **(2 p)**
   (b) Låt $a = b = 1$, och bestäm i detta fall den inversa avbildningen L^{-1}. **(2 p)**

DEL B

4. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

har egenvärdena 3 och 6. Bestäm en ortonormal bas av egenvektorer till A. **(4 p)**

5. Vektorrummet $V \subset \mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorerna

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en bas B för V. **(2 p)**

(b) Bestäm talet a så att vektorn

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \\ a \end{bmatrix},$$

ligger i V, bestäm därefter koordinaterna för $\vec{w}$ i basen B. **(2 p)**

6. Matrisrepresentationen av den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i basen $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ är matrisen

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Bestäm $T^n\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right)$ för alla heltal $n > 0$. **(4 p)**

Var god vänd!

Del C

7. Planet H i $\mathbb{R}^3$ innehåller punkten $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. En ljusstråle går genom punkten $P = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, träffar planet H i punkten A, reflekteras och går sedan genom punkten $Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en noll-skild normalvektor till planet H. **(4 p)**

8. Låt a, b, c och d vara reella konstanter sådana att $a < b < c < d$. Visa att ekvationssystemet
$$\begin{array}{rcl} x + y + z + w & = & k_1 \\ ax + by + cz + dw & = & k_2 \\ a^2x + b^2y + c^2z + d^2w & = & k_3 \\ a^3x + b^3y + c^3z + d^3w & = & k_4 \end{array}$$
med avseende på x, y, z och w, har exakt en lösning, oavsett valet av rella talen $k_1, \ldots, k_4$. **(4 p)**

9. Låt Λ vara ett nollskilt egenvärde till en kvadratisk, inverterbar matris A. Visa att Λ^{-1} är egenvärde till A^{-1}. **(4 p)**