KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Fredag, 23 oktober 2015

Skrivtid: 08:00–13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Tilman Bauer

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Vi har följande punkter:

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

i rummet $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestäm en ekvation för det plan H som går genom origo 0 och genom punkterna A och B. **(2 p)**

(b) Bestäm en parameterform för linjen l som är ortogonal mot planet H och innehåller punkten $Q = (1, 1, -1)$. **(1 p)**

(c) Bestäm avståndet mellan punkten Q och planet H. **(1 p)**

(a) Alla plan som går genom origo har ekvationer $ax + by + cz = 0$ där koefficienter a, b, c är koordinater av normalvektor till planet. För att bestämma normalvektor bildar vi vektorer $\vec{OA}$ och $\vec{OB}$ som har samma koordinater som punkterna A och B. Normalvektorn får man som deras kryssprodukt:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{e_1} + 4\vec{e_2} - 2\vec{e_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Planets ekvation blir $2x + 4y - 2z = 0$ eller efter förkortningen $x + 2y - z = 0$.

(b) Linjen ortogonal mot planet har samma riktningsvektor som normalvektor $\vec{n}$ till planet. Vi får då parameterekvation av linjen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2t \\ 1 + 4t \\ -1 - 2t \end{bmatrix}.$$

(c) Enligt avståndformeln, räknar vi avståndet d som

$$d = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}}.$$

2. Låt $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ vara standardbasen till $\mathbb{R}^3$. Betrakta den linjära avbildning $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ som bestäms av

$$F(\vec{e_1}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F(\vec{e_2}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad F(\vec{e_3}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm $F(\vec{v})$ där $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(1 p)**

(b) Varför är bildrummet till F hela $\mathbb{R}^2$? **(1 p)**
(c) Bestäm en bas till bildrummet $\mathrm{Im}(F)$. **(1 p)**
(d) Bestäm en bas till $\mathrm{Ker}(F)$. **(1 p)**

(a) Vi skriver $\vec{v}$ som $\vec{v} = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Eftersom F är linjär, får vi

$$F(\vec{v}) = -3F(\vec{e}_1) + F(\vec{e}_2) + F(\vec{e}_3) = -3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(b) Bildrummet till F innehåller alla linjära kombinationer av vektorer $F(\vec{e}_1)$ och $F(\vec{e}_2)$. Eftersom de två vektorerna är linjärt oberoende (man ser detta t ex eftersom determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ är nollskild) så utgör de en bas i tvådimensionella rummet $\mathbb{R}^2$. Deras linjära kombinationer spänner upp då hela rummet $\mathbb{R}^2$.

(c) Enligt resonemang i (b), vektorerna $F(\vec{e}_1)$ och $F(\vec{e}_2)$ utgör en bas av bildrummet till F som är hela $\mathbb{R}^2$.

(d) Ker (F) består av vektorer $\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ sådana att $F(\vec{v}) = \vec{0}$. Vi får

$$F(\vec{v}) = xF(\vec{e}_1) + yF(\vec{e}_2) + zF(\vec{e}_3) = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ x - y + z \end{bmatrix}.$$

Systemet av ekvationer

$$\begin{cases} x + 2y = 0; \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

är redan i trappstegsform. Vi väljer t ex $y = t$, ett godtyckligt tal. Den första ekvationen ger oss då $x = -2t$ medan den andra ger oss $z = y - x = 3t$. Vi får alltså

$$\vec{v} = t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Sådana vektorer utgör ett endimensionellt delrum vars bas är vektorn

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3. För konstanterna a, b ges avbildningen $L\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, genom

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax_1 - x_3 \\ x_2 + x_4 \\ x_3 - x_4 \\ bx_1 + x_2 + x_4 \end{bmatrix}.$$

(a) Använd determinanten för att bestämma alla a, b sådana att L blir inverterbar. **(2 p)**
(b) Låt $a = b = 1$, och bestäm i detta fall den inversa transformen L^{-1}. **(2 p)**

(a) Vi utläser först matris av avbildningen L:

$$[L] = \begin{bmatrix} a & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ b & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Avbildningen L är inverterbar om och endast om dess matris har nollskild determinant. Vi räknar nu determinanten av $[L]$ m h av kofaktorutvecklingar:

$$\det([L]) = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ b & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Vi ser nu att

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

eftersom den första raden är samma som den sista. Vi räknar också

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} = b \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -b.$$

Detta ger oss $\det([L]) = b$ och villkor att L är inverterbar är att $b \neq 0$.

(b) Vi bestämmer först inversmatris till matris av avbildningen L. För $a = b = 1$ får vi

$$A = [L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi söker A^{-1} m h av radoperationer. I beräkningen nedan betecknar R_k rad nummer k.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim [R_4 := R_4 - R_1] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim [R_4 := R_4 - R_2] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim [R_4 := R_4 - R_3] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim [R_3 := R_3 + R_4 \text{ samt } R_2 := R_2 - R_4] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim [R_1 := R_1 + R_3] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Vi får inversmatris

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Detta ger oss invers transform

$$L^{-1}(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_2 + y_4 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 \\ -y_1 - y_2 + y_4 \\ -y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \end{bmatrix}.$$

DEL B

4. Matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$
har egenvärdena 3 och 6. Bestäm en ortonormal bas av egenvektorer till A. **(4 p)**

Vi tar först egenvärdet $\lambda = 3$ och vi undersöker motsvarande egenvektorer d v s vektorer $\vec{v}$ som uppfyller $(A - 3I)\vec{v} = 0$. Vi får
$$A - 3I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
och tre ekvationer för koordinater x, y, z av egenvektorerna $\vec{v}$ blir ekvivalenta med ekvation $x + y - z = 0$. Vi väljer $y = s$ och $z = t$, där s och t är godtyckliga konstanter och vi får då $x = t - s$ och
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} t - s \\ s \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Detta visar att egenrum som hör till egenvärdet $\lambda = 3$ är tvådimensionellt och det har en bas av vektorer
$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}_2 = \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Tyvärr, är vektorer $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ inte ortogonala. Man skall omvandla bas av vektorer $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ till en ortomormal bas $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ m h av Gram-Schmidt metod. Vi normerar först vektorn $\vec{v}_1$:
$$\vec{w}_1 := \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{\vec{v}_1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$
Nu bildar vi den andra vektorn $\vec{w}_2'$ ortogonal mot $\vec{w}_1$ som
$$\vec{w}_2' = \vec{v}_2 - c \cdot \vec{w}_1, \quad \text{där} \quad c = \vec{v}_2 \cdot \vec{w}_1.$$
Vi får då $c = -1/\sqrt{2}$ och
$$\vec{w}_2' = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Vektorn $\vec{w}_2$ får man genom normering:

$$\vec{w}_2 = \frac{\vec{w}_2'}{\|\vec{w}_2'\|} = \frac{\vec{w}_2'}{\sqrt{3/2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Alltså, bestämde vi en ortonormal bas $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ av egenrummet som hör till egenvärdet $\lambda = 3$.

Nu tar vi egenvärdet $\lambda = 6$ och söker motsvarande egenvektorer $\vec{w}$. Vi observerar att matrisen A är symmetrisk och detta garanterar att egenvektorerna $\vec{w}$ som hör till $\lambda = 6$ är ortogonala till tidigare erhållna egenvektorer $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$. Vi räknar

$$A - 6I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Efter radoperationer tar matrisen trappstegsform

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och system av ekvationer för koordinater x, y, z av egenvektorer $\vec{w}$ blir

$$\begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ -3/2y - 3/2z = 0. \end{cases}$$

Vi väljer $z = t$ godtyckligt tal och vi får $y = -t$, $x = -t$ och

$$\vec{w} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Valet av $t = 1/\sqrt{3}$ ger oss normerad vektorn och vi får då den tredje vektorn i ortonormal bas:

$$\vec{w}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Svar: vektorerna $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ bestämda ovan.

5. Vektorrummet $V \subset \mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorerna

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en bas B för V. **(2 p)**

(b) Bestäm talet a så att vektorn

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \\ a \end{bmatrix},$$

ligger i V, bestäm därefter koordinaterna för $\vec{w}$ i basen B. **(2 p)**

(a) Vi bildar matris där vektorerna $\vec{v}_2$, $\vec{v}_4$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_1$ står som kolonner (ordning av vektorer väljs så att det blir lättare att överföra matrisen på trappstegsform). Vi får matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Enligt metoden skall man överföra matrisen på trappstegsform och välja ursprungliga vektorer som svarar till ledande ettor som basvektorer. Vi kör radoperationer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim [R_3 := R_3 - R_1] \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim [R_3 := R_3 - R_2 \text{ samt } R_4 := R_4 - 2R_2] \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ledande ettor står i den första och den andra kolonner vilket innebär att man får välja vektorer $\vec{v}_2$ och $\vec{v}_4$ som bas för V.

(b) Vektorn $\vec{w}$ ligger i V om och endast om $\vec{w} = x\vec{v}_2 + y\vec{v}_4$ för några tal x, y (eftersom $\vec{v}_2$ och $\vec{v}_4$ utgör en bas av V). Vi tänker på denna likhet som ett system av linjära ekvationer för obekanta x, y. Matris av systemet är

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & a \end{array}\right].$$

Samma radoperationer som används i (a) ger oss ekvivalent system i trappstegsform:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+8 \end{array}\right].$$

Den sista ekvationen kan uppfyllas endast om $a = -8$. För ett sådant a, får vi lösningarna $x = 7$ och $y = -4$. Det är koordinater av $\vec{w}$ i bas $\vec{v}_2$, $\vec{v}_4$.

6. Matrisrepresentationen av den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i basen $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ är matrisen

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Bestäm $T^n\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right)$ för alla heltal $n > 0$. **(4 p)**

Vi betecknar

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Att matrisen av avbildningen T i bas $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ är en diagonalmatris innebär att vektorerna $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ är egenvektorer av T och diagonala elementer 1 och $-1/2$ ger oss

$$T(\vec{v}_1) = \vec{v}_1 \quad \text{och } T(\vec{v}_2) = -\frac{1}{2}\vec{v}_2.$$

Vi får således

$$T^n(\vec{v}_1) = \vec{v}_1 \quad \text{och } T^n(\vec{v}_2) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \vec{v}_2.$$

Nu skriver vi vektorn $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ i bas $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$. Detta innebär att lösa system av ekvationer för obekanta x_1, x_2:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Det är ett enkelt system som har lösningar $x_1 = 7/2$ och $x_2 = 3/4$. Vi får alltså

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{7}{2}\vec{v}_1 + \frac{3}{4}\vec{v}_2$$

och

$$T^n\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \frac{7}{2}\vec{v}_1 + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}.$$

Var god vänd!

DEL C

7. Planet H i $\mathbb{R}^3$ innehåller punkten $A = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$. En ljusstråle går genom punkten $P = \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$, träffar planet H i punkten A, reflekteras och går sedan genom punkten $Q = \begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}$. Bestäm en noll-skild normalvektor till planet H. **(4 p)**

Vi betraktar två räta linjer: den första linjen l_1 går från P till A och fortsätter därefter på den andra sidan av planet H; den andra linjen l_2 går genom punkter A och Q. Reflektion i planet fungerar så att linjerna l_1 och l_2 är spegelbilder av varandra i planet H.

Nu skapar vi normerade vektorer $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ längs linjerna l_1 och l_2. Vi räknar först vektorn $\vec{PA} = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$ och vi normerar den så att

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{PA}\|}\vec{PA} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}.$$

Därefter räknar vi $\vec{AQ} = \begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$ och vi normerar den så att

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\|\vec{AQ}\|}\vec{AQ} = \begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{bmatrix}.$$

Om man sätter nu erhållna vektorerna $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ så att de har gemensamma fotpunkten i punkten A, så får man att de blir spegelbilder av varandra i planet H. Detta ger oss att deras skillnaden $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ är en vektor vinkelrät mot planet d v s den sökta normalvektorn. Vi får då

$$\vec{n} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}.$$

8. Låt a, b, c och d vara reella konstanter sådana att $a < b < c < d$. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= k_1 \\ ax + by + cz + dw &= k_2 \\ a^2x + b^2y + c^2z + d^2w &= k_3 \\ a^3x + b^3y + c^3z + d^3w &= k_4 \end{aligned}$$

med avseende på x, y, z och w, har exakt en lösning, oavsett valet av rella talen $k_1, \ldots, k_4$.

(4 p)

Ekvationssystem har 4 ekvationer för 4 obekanta d v s det är ett kvadratiskt system. Att ett sådant system har exakt en lösning är ekvivalent med att dess determinant är nollskild. Vi skall nu visa detta. Vi bildar alltså determinanten

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Vi gör nu följande radoperationer som inte ändrar determinanten: $R_2 := R_2 - a \cdot R_1$; $R_3 := R_3 - a^2 \cdot R_1$ samt $R_4 := R_4 - a^3 \cdot R_1$. Vi får då

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) & (d-a)(d+a) \\ 0 & (b-a)(b^2+ba+a^2) & (c-a)(c^2+ca+a^2) & (d-a)(d^2+da+a^2) \end{vmatrix}.$$

Man ser nu att det finns gemensamma faktorer i kolonner som kan brytas ut: faktorn $b - a$ kan brytas ut från den andra kolonnen och likadant för den tredje och den fjärde kolonnen. Vi får nu

$$\Delta_4 = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b+a & c+a & d+a \\ 0 & b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 & d^2+da+a^2 \end{vmatrix}$$

och kofaktorutveckling längs den första kolonnen ger oss

$$\Delta_4 = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 & d^2+da+a^2 \end{vmatrix}.$$

Eftersom a, b, c är alla skilda från varandra, så får vi att determinanten Δ_4 blir nollskild om och endast om den nya determinanten Δ_3 är nollskild, där

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 & d^2+da+a^2 \end{vmatrix}.$$

Vi gör nu följande radoperationer som inte ändrar determinanten Δ_3: $R_3 := R_3 - a \cdot R_2$ samt $R_2 := R_2 - a \cdot R_1$. Vi får då

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}.$$

Den determinanten har samma utseendet som ursprungliga determinanten Δ_4 men den har mindre ordning 3 istället av 4! Samma resonemang som vi använde för Δ_4 återför nu determinanten Δ_3 på även mindre determinant

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix}$$

som räknas direkt och som är nollskild.

Enligt vår resonemang då är även ursprungliga determinanten Δ_4 också nillskild.

(OBS! Determinanter av typ Δ_4, Δ_3 m m är kända under namn Vandermondes determinanter).

9. Låt Λ vara ett nollskilt egenvärde till en kvadratisk, inverterbar matris A. Visa att Λ^{-1} är egenvärde till A^{-1}. **(4 p)**

Om $\Lambda \neq 0$ är ett egenvärdet till matris A innebär detta att

$$A\vec{v} = \Lambda\vec{v}$$

för motsvarande egenvektorn $\vec{v}$. Vi multiplicerar nu denna likhet med matris A^{-1} från vänster och med tal Λ^{-1}. Vi får

$$\Lambda^{-1}A^{-1}A\vec{v} = A^{-1}\vec{v}$$

och eftersom $A^{-1}A = I$ och $I\vec{v} = \vec{v}$ så får vi

$$\Lambda^{-1}\vec{v} = A^{-1}\vec{v}.$$

Denna ekvation visar att samma vektorn $\vec{v}$ är även egenvektorn till matris A^{-1} som hör till egenvärdet Λ^{-1}.