SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Tisdagen den 27 oktober 2015

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Lars Filipsson

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del A på tentamen utgörs av de första tre uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 12 poäng. Poängsumman på del A kan alltså bli högst 12 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de sista tre uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Betrakta funktionen f som ges av $f(x) = 1 + x + \dfrac{4}{(x-2)^2}$.

   A. Bestäm definitionsmängden till f.
   B. Bestäm alla intervall där f är växande respektive avtagande.
   C. Bestäm alla lokala extrempunkter till f.
   D. Bestäm alla asymptoter till funktionsgrafen $y = f(x)$.
   E. Skissa med hjälp av ovanstående funktionsgrafen $y = f(x)$.

2. Beräkna nedanstående integraler:

   A. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(x^2+4)^{1/3}}\,dx$ (använd gärna substitutionen $u = x^2 + 4$)
   B. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\ln x\,dx$ (använd gärna partiell integration)

3. Bestäm den största area en rätvinklig triangel kan ha, om hypotenusan och ena kateten har en sammanlagd längd av 1 meter. Rita figur!

DEL B

4. Betrakta funktionen $f(t) = e^t - \cos t - \sin t$.

   A. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 kring punkten $t = 0$ till funktionen f.

   B. Ange feltermen (på valfri form).

   C. Beräkna gränsvärdet $\lim_{t \to 0} \dfrac{f(t)}{t^2}$.

5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x \, dx$.

   (För full poäng krävs att integralen beräknas exakt, men en approximativ beräkning kan ge delpoäng. Svaret ska förenklas så långt som möjligt).

6. Laddningen $q(t)$ i kondensatorn i en viss växelströmskrets uppfyller differentialekvationen

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\frac{dq}{dt} + 2q = 5\cos t$$

   med initialvillkoren $q(0) = 1$ och $q'(0) = 3$.

   A. Bestäm laddningen i kondensatorn vid tiden t.

   B. Beskriv vad som händer med laddningen i kondensatorn efter lång tid.

Var god vänd!

DEL C

7. Denna uppgift handlar om teorin kring derivator och integraler:
   A. Formulera produktregeln för derivator (på engelska the product rule).
   B. Bevisa produktregeln för derivator.
   C. Formulera regeln för partiell integration (på engelska integration by parts).
   D. Bevisa regeln för partiell integration.

8. Betrakta funktionen $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \cos t \, dt$ med definitionsmängd $D = [0, \pi]$.
   A. Ange de delintervall av D där F är växande respektive avtagande.
   B. Bestäm punkter a och b i D sådana att
      $F(a) \leq F(x)$ för alla $x \in D$,
      $F(b) \geq F(x)$ för alla $x \in D$.

9. Beräkna gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \arctan \frac{k}{n}$.