KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2015-10-27

DEL A

1. Betrakta funktionen f som ges av $f(x) = 1 + x + \dfrac{4}{(x-2)^2}$.

   A. Bestäm definitionsmängden till f.
   B. Bestäm alla intervall där f är växande respektive avtagande.
   C. Bestäm alla lokala extrempunkter till f.
   D. Bestäm alla asymptoter till funktionsgrafen $y = f(x)$.
   E. Skissa med hjälp av ovanstående funktionsgrafen $y = f(x)$.

Lösning. A. Funktionen är definierad för alla $x \neq 2$.

B. Vi deriverar och får

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-2)^3}$$

som existerar för alla $x \neq 2$. Vi ser att $f'(x) = 0 \iff x = 4$. Ett teckenstudium av derivatan:

Om $x < 2$ så är $f'(x)$ positivt.

Om $2 < x < 4$ så är $f'(x)$ negativt.

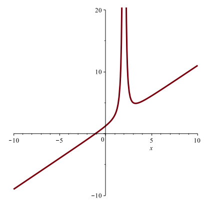
Om $x > 4$ så är $f'(x)$ positivt.

Det följer av ovanstående att f är strängt växande på intervallet $x < 2$, strängt avtagande på intervallet $2 < x < 4$ och strängt växande på intervallet $x > 4$,

C. Det följer direkt av undersökningen ovan att f har exakt en lokal extrempunkt, nämligen ett lokalt minimum i $x = 4$.

D. Eftersom $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$ så är linjen $x = 2$ en lodrät asymptot till kurvan $y = f(x)$. Eftersom vidare $\lim_{x\to\pm\infty} 4/(x-2)^2 = 0$ så är linjen $y = x + 1$ sned asymptot i $\pm\infty$.

E. Nu kan vi skissa grafen:



□

Svar: A. Alla $x \neq 2$. B. Strängt växande på intervallet $x < 2$, strängt avtagande på intervallet $2 < x < 4$ och strängt växande på intervallet $x > 4$. C. Ett lokalt minimum i $x = 4$. D. Lodrät asymptot $x = 2$, sned asymptot $y = x+1$ i plus och minus oändligheten. E. Se ovan.

2. Beräkna nedanstående integraler:

A. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(x^2+4)^{1/3}}\,dx$ (använd gärna substitutionen $u = x^2+4$)

B. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\ln x\,dx$ (använd gärna partiell integration)

Lösning. A. Vi använder substitutionen $u = x^2+4$, med $du = 2x\,dx$ och nya gränser 4 och 8, och får:

$$\int_0^2 \frac{x}{(x^2+4)^{1/3}}\,dx = \frac{1}{2}\int_4^8 \frac{du}{u^{1/3}} = \left[\frac{3u^{2/3}}{4}\right]_4^8 = 3 - \frac{3}{2^{2/3}}.$$

B. Vi använder partiell integration och får

$$\int_1^4 \sqrt{x}\ln x\,dx = \left[\frac{x^{3/2}\ln x}{3/2}\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{3/2}\,dx = \frac{16\ln 4}{3} - \frac{28}{9}.$$

$\square$

Svar: A. $3 - \frac{3}{2^{2/3}}$. B. $\frac{16\ln 4}{3} - \frac{28}{9}$.

3. Bestäm den största area en rätvinklig triangel kan ha, om hypotenusan och ena kateten har en sammanlagd längd av 1 meter. Rita figur!

Lösning. Låt hypotenusan ha längden $1-x$ meter. Då har ena kateten längden x meter och den andra kateten enligt Pythagoras sats har då längden $\sqrt{1-2x}$ meter. Arean av triangeln ges då av

$$A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1-2x}, \qquad \text{där } 0 < x < 1/2.$$

Vi deriverar och får

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-2x} - x\cdot\frac{2}{2\sqrt{1-2x}}\right) = \frac{1-3x}{2\sqrt{1-2x}}.$$

Vi ser att $A'(x) = 0 \iff x = 1/3$ och ett teckenstudium av derivatan ger:
Om $0 < x < 1/3$ så är $A'(x) > 0$ och $A(x)$ alltså strängt växande.
Om $1/3 < x < 1/2$ så är $A'(x) < 0$ ch $A(x)$ alltså strängt avtagande.

Det följer av ovanstående att det största värdet som arean kan anta är

$$A(1/3) = \frac{1}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

kvadratmeter.

□

Svar: $\sqrt{3}/18$ kvadratmeter.

DEL B

4. Betrakta funktionen $f(t) = e^t - \cos t - \sin t$.

   A. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 kring punkten $t = 0$ till funktionen f.
   B. Ange feltermen (på valfri form).
   C. Beräkna gränsvärdet $\lim_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{t^2}$.

   Lösning. A. Med hjälp av de kända utvecklingarna av exponential-, sinus och cosinus-funktionerna (eller genom derivering etc) fås andra gradens Taylorpolynom till f kring origo som $p(t) = t^2$.

   B. Feltermen är $B(t)t^3$ för någon funktion t som är begränsad i någon omgivning av origo. (kan också uttryckas på andra sätt, t ex som $\mathcal{O}(t^3)$.

   C. Med hjälp Taylorpolynomet ovan får vi (för någon funktion B som är begränsad runt origo):

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 + B(t)t^3}{t^2} = \lim_{t\to 0}(1 + B(t)t) = 1.$$

□

Svar: A. $p(t) = t^2$. B. $B(t)t^3$ för någon funktion t som är begränsad i någon omgivning av origo. C. 1

5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x\, dx$.

   (För full poäng krävs att integralen beräknas exakt, men en approximativ beräkning kan ge delpoäng. Svaret ska förenklas så långt som möjligt).

   Lösning. Vi beräknar integralen exakt med hjälp av partiell integration mm:

$$\int_0^1 \arcsin x\, dx = [x \arcsin x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2} + [\sqrt{1-x^2}]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

   (Den som istället vill approximera integralen har att välja på flera metoder, t ex använda en Riemannsumma, använda trapetsregeln eller Taylorutveckla integranden.) □

   Svar: $\pi/2 - 1$

6. Laddningen $q(t)$ i kondensatorn i en viss växelströmskrets uppfyller differentialekvationen

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\frac{dq}{dt} + 2q = 5\cos t$$

med initialvillkoren $q(0) = 1$ och $q'(0) = 3$.

A. Bestäm laddningen i kondensatorn vid tiden t.

B. Beskriv vad som händer med laddningen i kondensatorn efter lång tid.

Lösning. För att lösa differentialekvationen och bestämma $q(t)$ konstaterar vi först att $q(t) = q_h(t) + q_p(t)$ där q_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differentialekvation och q_p är någon partikulärlösning till den givna differentialekvationen.

Vi söker först q_h. Den karaktäristiska ekvationen $r^2 + 2r + 2 = 0$ har lösning $r = -1 \pm i$ varför

$$q_h(t) = e^{-t}(A\cos t + B\sin t), \quad A, B \text{ godtyckliga konstanter.}$$

Vi söker sedan q_p och gör ansatsen $q_p(t) = c\cos t + d\sin t$. Efter derivering, insättning i differentialekvationen och identifiering av koefficienter ser vi att vi har en partikulärlösning

$$q_p(t) = \cos t + 2\sin t.$$

Vi har alltså att den allmänna lösningen till differentialekvationen i uppgiften är

$$q(t) = e^{-t}(A\cos t + B\sin t) + \cos t + 2\sin t, \quad A, B \text{ godtyckliga konstanter.}$$

Begynnelsevillkoret $q(0) = 1$ ger $A = 0$ och villkoret $q'(0) = 3$ ger $B = 1$ så laddningen i kondensatorn vid tiden t ges av

$$q(t) = e^{-t}\sin t + \cos t + 2\sin t.$$

B. Vi har att $\lim_{t\to\infty} e^{-t}\sin t = 0$ så det som blir kvar när tiden går mot oändligheten är $\cos t + 2\sin t$. Så efter lång tid varierar laddningen i kondensatorn ungefär som $\cos t + 2\sin t$.

□

Svar: A. $q(t) = e^{-t}\sin t + \cos t + 2\sin t$.

B. Laddningen varierar efter lång tid ungefär som $\cos t + 2\sin t$.

DEL C

7. Denna uppgift handlar om teorin kring derivator och integraler:
   A. Formulera produktregeln för derivator (på engelska the product rule).
   B. Bevisa produktregeln för derivator.
   C. Formulera regeln för partiell integration (på engelska integration by parts).
   D. Bevisa regeln för partiell integration.

   Lösning. Se läroboken!

   □

   Svar:

8. Betrakta funktionen $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \cos t \, dt$ med definitionsmängd $D = [0, \pi]$.
   A. Ange de delintervall av D där F är växande respektive avtagande.
   B. Bestäm punkter a och b i D sådana att
   $F(a) \leq F(x)$ för alla $x \in D$,
   $F(b) \geq F(x)$ för alla $x \in D$.

Lösning. Vi ser direkt att F är kontinuerlig på $[0, \pi]$ som är slutet och begränsat. Existensen av punkter a och b med egenskaper som i uppgiften är därför klar. De kan vara kritiska punkter, ändpunkter eller singulära punkter. Vi deriverar och får $F'(x) = e^{-x^2} \cos x$ som existerar för alla x sådana att $0 < x < \pi$. Inga singulära punkter finns alltså. Vi gör ett teckenstudium av $F'(x)$ och ser att:
+ på intervallet $0 < x < \pi/2$ är $F'(x) > 0$
+ i punkten $x = \pi/2$ gäller att $F'(x) = 0$
+ på intervallet $\pi/2 < x < \pi$ är $F'(x) < 0$

Det följer av ovanstående att F är strängt växande på $[0, \pi/2]$ och strängt avtagande på $[\pi/2, \pi]$.

Vi observerar också att ovanstående resonemang visar att F har en lokal och global maxpunkt i $x = \pi/2$, så om vi väljer $b = \pi/2$ så är $F(b) \geq F(x)$ för alla $x \in D$.

Det minsta värdet av F måste nu antas i någon av ändpunkterna i intervallet, så det enda vi behöver göra är att jämföra $F(0)$ och $F(\pi)$. Vi ser direkt att $F(0) = 0$. Vi har att

$$F(\pi) = \int_0^\pi e^{-t^2} \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} e^{-t^2} \cos t \, dt + \int_{\pi/2}^\pi e^{-t^2} \cos t \, dt.$$

Eftersom $e^{-t^2} \cos t > 0$ på $[0, \pi/2)$ så är $\int_0^{\pi/2} e^{-t^2} \cos t \, dt > 0$ och eftersom $e^{-t^2} \cos t < 0$ på $(\pi/2, \pi]$ så är $\int_{\pi/2}^\pi e^{-t^2} \cos t \, dt < 0$. Dessutom gäller att

$$\left| \int_0^{\pi/2} e^{-t^2} \cos t \, dt \right| > \left| \int_{\pi/2}^\pi e^{-t^2} \cos t \, dt \right|$$

eftersom $\cos t$ är symmetrisk kring $\pi/2$ och e^{-t^2} är avtagande. Det följer att $F(\pi) > 0$. Om vi väljer $a = 0$ så gäller alltså att $F(a) \leq F(x)$ för alla $x \in D$.

□

Svar: A. F är strängt växande på $[0, \pi/2]$ och strängt avtagande på $[\pi/2, \pi]$.
B. Vi ska välja $a = 0$ och $b = \pi/2$

9. Beräkna gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \arctan \frac{k}{n}$.

Lösning. Vi observerar att summan $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \arctan \frac{k}{n}$ är en Riemannsumma med n lika stora delintervall till integralen

$$\int_0^1 x \arctan x \, dx.$$

Eftersom integranden är kontinuerlig på hela integrationsintervallet inklusive ändpunkterna konvergerar följden av Riemannsummorna när $n \to \infty$ mot integralen. Vi har alltså att

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \arctan \frac{k}{n} = \int_0^1 x \arctan x \, dx.$$

Vi beräknar integralen med partiell integration i första steget:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \arctan x \, dx &= \left[\frac{x^2}{2} \arctan x \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} \\
&= \frac{\pi - 2}{4}.
\end{aligned}$$

□

Svar: $\frac{\pi-2}{4}$