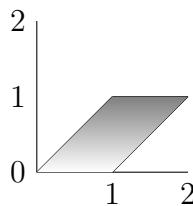


November 4, 2015. Föreläsning 13.

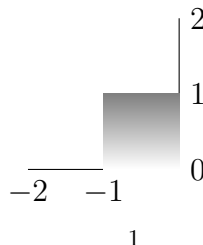
Tillämpad linjär algebra

Innehållet:

- Ortogonala matriser.
 - Transpose av en matris
1. **Definition.** Låt $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning.
 - f bevarar längden om $\|f(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$ för alla \vec{v} i \mathbb{R}^k .
 - f bevarar ortogonalitet om $f(\vec{v}) \cdot f(\vec{w}) = 0$ för alla \vec{v} och \vec{w} i \mathbb{R}^k så att $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.
 - f bevarar vinklar om vinkeln mellan $f(\vec{v})$ och $f(\vec{w})$ är lika med vinkeln mellan \vec{v} och \vec{w} för alla \vec{v} och \vec{w} i \mathbb{R}^k .
 - f bevarar skalärprodukt om $f(\vec{v}) \cdot f(\vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$ för alla \vec{v} och \vec{w} i \mathbb{R}^k .
 2. **Definition.** En linjär avbildning $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kallas för **ortogonal** om $\|f(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$ för alla \vec{v} (den bevarar längden).
 3. **Proposition.** Låt $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning.
 - f bevarar längden om och endast om f bevarar skalärprodukt.
 - Om f bevarar längden, då bevarar f ortogonalitet och vinklar.
 4. **Uppgift.** Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ges av matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.
 - Bevisa att f bevarar ortogonalitet och vinklar.
 - Bevisa att f är inte ortogonal.
 5. **Uppgift.** Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en linjär funktion som avbildar enhetskvadraten på en parallelogram enligt figuren:



- Bestäm standardmatrisen till f .
 - Är det sant att f bevarar längden, ortogonalitet, vinklar?
6. **Uppgift.** Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en linjär funktion som avbildar enhetskvadraten på



en parallelogram enligt figuren:

- Bestäm standardmatrisen till f .
- Är det sant att f bevarar längden, ortogonalitet, vinklar?

7. **Uppgift.** Låt \vec{v} vara en vektor i \mathbb{R}^3 . Antar att $\|\vec{v}\| = 1$. Låt $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara rotation runt linjen $\text{span}(\vec{v})$ i α radianer.

- Bestäm standardmatrisen till f .
- Är det sant att f bevarar längden, ortogonalitet, vinklar?

8. Låt A vara $n \times k$ matris:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} = [\vec{C}_1 \quad \vec{C}_2 \quad \cdots \quad \vec{C}_n]$$

Transpose av A är $k \times n$ matris:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{C}_1^T \\ \vec{C}_2^T \\ \vdots \\ \vec{C}_n^T \end{bmatrix}$$

9. Om $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är ortogonal då den bevarar skalär produkt, vinklar, ortogonalitet.

10. Låt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara ortogonal och

$$A = [\vec{C}_1 \quad \vec{C}_2 \quad \cdots \quad \vec{C}_n] = [f(\vec{e}_1) \quad f(\vec{e}_2) \quad \cdots \quad f(\vec{e}_n)] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

vara standardmatrisen till f . För att f bevarar längden och ortogonalitet, det betyder att:

- $\|\vec{C}_i\| = \|f(\vec{e}_i)\| = \|\vec{e}_i\| = 1$, dvs, kolonnerna till f har längden 1;
- Låt $i \neq j$. Då $\vec{C}_i \cdot \vec{C}_j = f(\vec{e}_i) \cdot f(\vec{e}_j) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$, dvs kolonnerna till f är ortogonala.

Det betyder att:

$$A^T A = \begin{bmatrix} \vec{C}_1^T \\ \vec{C}_2^T \\ \vdots \\ \vec{C}_n^T \end{bmatrix} [\vec{C}_1 \quad \vec{C}_2 \quad \cdots \quad \vec{C}_n] = \begin{bmatrix} \vec{C}_1 \vec{C}_1 & \vec{C}_1 \vec{C}_2 & \cdots & \vec{C}_1 \vec{C}_n \\ \vec{C}_2 \vec{C}_1 & \vec{C}_2 \vec{C}_2 & \cdots & \vec{C}_2 \vec{C}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{C}_n \vec{C}_1 & \vec{C}_n \vec{C}_2 & \cdots & \vec{C}_n \vec{C}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Vi har bevisad:

11. **Proposition.** Låt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara ortogonal och A vara standardmatrisen till f . Då f är inverterbar och matrisen till f^{-1} ges av A^T .

12. **Proposition.** Låt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning och A vara matrisen till f . Följande är ekvivalenta:

- (1) f är ortogonal.
- (2) kolonnerna till A är ortogonala och har längden 1.
- (3) raderna till A är ortogonala och har längden 1.
- (4) A är inverterbar och A^T är inversen till A .

13. **Proposition.** Låt $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara ortogonala linjär avbildningar.

- (1) f^{-1} är ortogonal
- (2) $f \circ g$ är ortogonal

14. **Uppgift.** Hitta inversen till följande matris:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

15. **Uppgift.** Låt \vec{v} och \vec{w} vara vektorer i \mathbb{R}^3 . Antar att $|\vec{v}| = 1$ och $\dim(\text{span}(\vec{v}, \vec{w})) = 2$. Låt $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara rotation runt linjen $\text{span}(\vec{v})$ i α radianer och $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara spegling om planet $\text{span}(\vec{v}, \vec{w})$. Vad kan du säga om kolonnerna av standardmatriserna till f , g , fg och gf ?