FUNKTIONER

Innan vi kan komma vidare med grafteorin behöver vi införa någonting som heter *funktioner*. Tidigare har vi stött på funktioner när det gäller tal, vi kallar en visst tal x och funktionen f fungerar så att den skapar ett nytt tal y hörande till varje tal x och vi skriver då $y = f(x)$. Exempel på funktioner som vi stött på är

$$f(x) = e^x \qquad g(x) = \sin x \qquad h(x) = 2x^3 + 4x^2 - x + 10 \qquad k(x) = ln(x)$$

eller vilken annan kombination som helst av matematiska uttryck. (Vi använder olika bokstäver för att beteckna olika funktioner.) Vi ska nu ta fasta på ungefär vad en funktion är för något. Vi gör en luddig definition:

Definition: En funktion f är en regel som till varje element x i en mängd A ordnar ett element y i en mängd B. Vi skriver då

$$f : A \to B \qquad y = f(x)$$

och detta utläses f *går från* A *till* B och f *antar* y *i* x. Mängden A kallas funktionens *definitionsmängd* (engelska: *domain*) och mängden B kallas funktionens kodomän (engelska: *co-domain*).

Det som är centralt är att det ordnas *precis* ett element y till varje element x. Vi får till exempel *inte* en funktion av följande regel: För varje positivt reellt tal x välj ett tal y som uppfyller $y^2 = x$. Om vi väljer $x = 9$ så ordnar denna regel två tal $y = 3$ och $y = -3$ till $x = 9$. Däremot blir ovanstående regel en funktion om vi också kräver att talet som tas fram ska vara positivt, den funktionen brukar då betecknas $f(x) = \sqrt{x}$.

Egenskaper hos funktioner

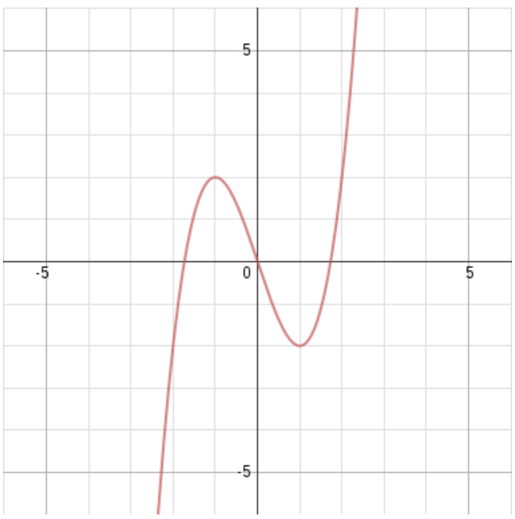
Vi ska införa tre egenskaper hos funktioner.

Definition: Låt f vara en funktion med definitionsmängd A och kodomän B.

1. Om f antar alla värden i B minst en gång så kallas f *surjektiv*. Engelska: *onto/surjective*.
2. Om f antar alla värden i B högst en gång så kallas f *injektiv*. Engelska: *one-to-one/injective*.
3. Om f antar alla värden i B precis en gång så kallas f *bijektiv*. Engelska: *bijective*.

Det står klart att en funktion är bijektiv precis då den är både injektiv och surjektiv.

Exempel: Funktionen f definierad för alla reella tal x given av det matematiska uttrycket $f(x) = x^3 - 3x$ har följande utseende.



Vi ser att alla värden längs y-axeln antas minst en gång, den här funktionen är alltså surjektiv. Men den är inte injektiv eftersom till exempel $f(0) = f(\sqrt{3}) = 0$ så funktionsvärdet 0 antas för mer än ett x, nämligen $x = 0$ och $x = \sqrt{3}$. (Ja 0 antas till och med i ett tredje x också.) Det finns också fler funktionsvärden som antas mer än en gång.

Exempel: Betrakta nu funktionen g som går från $\mathbb{Z}$ (alltså heltalen) till $\mathbb{Z}$ återigen given av $g(x) = x^3 - 3x$. är denna funktion också surjektiv? Det är en *annan* funktion eftersom vi ändrat definitionsmängden, men frågan är då, är g också surjektiv eftersom f var surjektiv? Svaret är faktiskt NEJ. För att se att det verkligen är så behöver vi hitta ett heltal som g aldrig antar. Om man studerar grafen ovan (som också kan användas för att dra slutsatser om g) så ser vi att vi inte kan ha något heltal x för vilket $g(x) = 5$. Det betyder alltså att när vi talar om en funktion så måste vi också ange vilken definitionsmängd och kodomäm som vi menar. Vi har samma matematiska uttryck som definierar de båda funktionerna ovan, och den första funktionen är surjektiv men den andra är inte det.

Exempel: Vi ska nu se på en annan funktion $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. ($\mathbb{R}^+$ betyder alla icke-negativa reella tal och $\mathbb{R}$ betyder alla reella tal.) Vi definierar $h(x)$ som det tal y som uppfyller $y^2 = x$. Detta är då den vanliga rotfunktionen som vi skriver som $h(x) = \sqrt{x}$. Är den här funktionen surjektiv? Antar den alla värden i $\mathbb{R}$, nejm den antar inga negativa tal så funktionen h är inte surjektiv. Observera att om vi inskränker kodomänen till $\mathbb{R}^+$ så får vi en surjektiv funktion, men det blir noga taget en annan funktion.

Är denna funktion injektiv? Ja om vi tittar på funktionsgrafen så kan vi förmoda att den r det, men hur visar vi det? Jo, en injektiv funktion ska anta olika funktionsvärden i olika punkter, det vill säga vi ska visa att

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2).$$

Det här är en implikation och den är ekvivalent med sin kontraposition så vi kan lika gärna visa implikationen $\neg(h(x_1) \neq h(x_2)) \Rightarrow \neg(x_1 \neq x_2)$ som lättare kan skrivas

$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Så välj alltså två stycken punkter, x_1, x_2, helt godtyckligt i h:s definitionsmängd men antag att $h(x_1) = h(x_2)$. Det betyder då alltså att $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$. Men här kan vi förstås kvadrera båda led så att vi får $(\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{x_2})^2$, vilket kan skriva om till just $x_1 = x_2$ som var det vi ville visa. Vi har då alltså visat att funktionen h är injektiv.

Bijektiva funktioner

Som vi konstaterade i definitionen av injektivitet och surjektivitet så är bijektivitet samma sak som att en funktion är både injektiv och surjektiv. Sådana funktioner är väldigt viktiga i matematiken för man kan *invertera* dem. Vi ska se vad det betyder snart. Vi börjar med att studera närmare vad det innebär att en funktion är bijektiv.

Exempel: Vi ska ta ett lite annorlunda exempel, en funktion som vi definierar, inte som ett matematiskt uttryck genom att helt ange vad den ska anta. Betrakta en postkö bestående av fyra personer, Anna, Antonio, Sahar och Kalle. Om de personerna ställer sig i den ordning de är angivna så kan vi ge varje person ett könummer: Anna får 1, Antonio får 2, Sahar får 3 och Kalle får 4. Nu har vi skapat en funktion som vi kan kan kalla q som går från mängden av personer, $\{Anna, Antonio, Sahar, Kalle\}$, till mängden av de fyra första postiva heltalen, $\{1, 2, 3, 4\}$ genom att helt enkelt säga att

$$q(Anna) = 1 \quad q(Antonio) = 2 \quad q(Sahar) = 3 \quad q(Kalle) = 4.$$

Det här är en definition som är lika bra som matematiska uttryck, det viktiga är att funktionsvärden ablir bestämda och det blir de här, inte som matematiska uttryck men de är ändå bestämda. (Vi kan ju inte utföra några räkneoperationer på personer, ”$Kalle + 3 \cdot Antonio - Anna$” betyder ju ingenting!)

Det viktiga är att funktionen q är bijketiv. Den är det eftersom den både är surjektiv (alla värden 1,2,3,4 antas minst en gång) och injektiv (värden antas högst en gång) så vi ser att alla värden antas precis en gång. Detta är bijektivitet och det innebär att varje element i mängden $\{Anna, Antonio, Sahar, Kalle\}$ paras ihop med precis ett av elementen i $\{1, 2, 3, 4\}$. Men då kan det här gå åt båda hållen: funktionen q ger ett könummer för varje person, men funktionen q ger också en person för varje könummer! Vi kan alltså definiera en ny funktion, $r : \{1, 2, 3, 4\} \to \{Anna, Antonio, Sahar, Kalle\}$ genom att säga

$$r(i) = \text{den person som har könummer } i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Om vi tänker efter så är det precis det här som händer varje gång några personer går in i en affär med kölappar, först går Anna, Antonio, Sahar och Kalle in i affären och tar varsinn kölapp, då definieras funktionen q (för att alla har en tilldelad kölapp, och precis en kölapp var - en bijektiv funktion har bildats) och sen när expediten ropar upp kunderna så används funktionen r, expexpediten säger, ”vem har nummer 1”? Och frågar alltså efter $r(1)$, vem som alltså har nr 1 (och det kan bara vara en eftersom funktionen q är bijektiv), och så vidare med $r(2), r(3)$ och $r(4)$. Funktionen r brukar kallas funktionen q:s *invers* och vi har alltid att inversens definitionsmängd är hela kodomänen hos den funktion vi inverterar och inversens värdemängd är den inverterade funktionens definitionsmängd. Alltså:

$$D_q = V_r = \{Anna, Antonio, Sahar, Kalle\} \qquad D_r = V_q = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Vi skriver detta i en formell definition:

Definition: Låt $f : A \to B$ vara en bijektiv funktion. Funktionen $f^{-1} : B \to A$ definerad genom

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

kallas då funktionen f:s *invers*. Funktionen f kallas också en *ett-till-ett korrespondens* (engelska: *one-to-one correspondence*) mellan elementen i mängderna A och B.

Hur räknar man antal element i en ändlig mängd? Jo vi radar upp elementen och tilldelar varje element ett ordningsnummer. Men det här är en vag definition. Vi har räknat element i mängder ända sedan vi var små men har vi egentligen någonsin förstått vad vi gjort? Vi skulle kunna säga så här att vi r̈knar antal element i en ändlig mängd genom att ange en bijektion från en mängd av positiva heltal börjadės på 1, innehållandes samtliga heltal fram till och med det största talet. Det största talet i denna mängd är antalet element i den mängd av element som vi vill räkna. Vi skulle faktiskt kunna ta det här som en definition av antalet element i en ändlig mängd. Vi räknar alltså antalet element i en ändlig mängd B genom att finna en 1-1 korrespondens till mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$ där n är ett positivt heltal. Antalet element i B är då n. ($\{Anna, Antonio, Sahar, Kalle\}$ var en mängd med 4 personer efter n där var 4.)

Vi ska använda bijektioner till att se att matematiska objekt egentligen är de samma, precis vad det betyder kan vi inte förklara nu, men bijektioner kommer att ligga till grund fr begreppet *isomorfism*.