Oktober 14, 2015. Föreläsning 11.

Tillämpad linjär algebra

Innehållet:

- Linjära funktioner: nollrum, bildrum, rang.
- sammansättning av linjära funktioner och matriser

1. Nollrum, bildrum, och rang av en linjär avbildning. Låt $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning som ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \cdots & \vec{C}_k \end{bmatrix}$$

där $\vec{C}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ är i-te kolon till A.

- **Rang** av f är lika med rangen av A.
- **Nollrummet** till f är delmängd av $\mathbb{R}^k$ som består av alla vektorer $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^k$, så att $f(\vec{v}) = \vec{0}$. Nollrummet till$f$ betecknas med $\ker(f)$. Nollrummet består av alla vektorer $\vec{v}$ som uppfyller $A\vec{v} = \vec{0}$. Nollrum till f består av lösningar till:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Bildrummet** till f är delmängd av $\mathbb{R}^n$ som består av alla vektorer $\vec{b}$ i $\mathbb{R}^n$, så att $\vec{b} = f(\vec{v})$ för någon vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^k$. Bildrummet betecknas med $\mathrm{im}(f)$. Det betyder att en vektor $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ i bildrummet till f kan skrivas som:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Altså:

$$x_1\vec{C}_1 + x_2\vec{C}_2 + \cdots + x_n\vec{C}_n = \vec{b}$$

Det betyder att bildrummet till f ges av $\mathrm{span}(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \ldots, \vec{C}_n)$:

$$\mathrm{im}(f) = \mathrm{span}(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \ldots, \vec{C}_n)$$

2. **Proposition.** Låt $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ var en linjär avbildning. Nollrummet $\ker(f)$ är ett delrum i $\mathbb{R}^k$ och bildrummet $\mathrm{im}(f)$ är ett delrum i $\mathbb{R}^n$.

3. **Proposition** Låt $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär funktion som ges av matrisen $A = \begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \cdots & f(\vec{e}_k) \end{bmatrix}$.

- f är one to on om och endast om $\ker(f) = 0$.
- f är onto om och endast om $\mathrm{span}(f(\vec{e}_1), \ldots f(\vec{e}_k)) = \mathbb{R}^n$, dvs om och endast om rangen till A är lika med n.

4. **Uppgift.** Bevisa Proposition 2 och 3.

5. **Uppgift.** Betrakta en linjär funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ som ges av:

$$f \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3v_1 - 4v_3 \\ v_2 + 5v_3 \\ 3v_1 \\ -v_1 - v_2 + 100v_3 \end{bmatrix}$$

Bestäm nollrummet, bildrummet, och rangen till f. Hitta en bas till $\ker(f)$, $\mathrm{im}(f)$ och bestäm $\dim(\ker(f))$ och $\dim(\mathrm{im}(f))$. Avgör om $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är i bildrummet till f. Avgör om f är one to one. Avgör om f är onto.

6. **Uppgift.** Låt $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär funktion som ges av matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Bestäm nollrummet, bildrummet, och rangen till f. Hitta en bas till $\ker(f)$, $\mathrm{im}(f)$ och bestäm $\dim(\ker(f))$ och $\dim(\mathrm{im}(f))$. Avgör om f är one to one. Avgör om f är onto.

7. Låt $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ och $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara funktioner. **Sammansättning** av f och g är en funktion $gf : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ som avbildar vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^k$ till vektor $g(f(\vec{v}))$ i $\mathbb{R}^m$. Vi ofta använder följande graf föreställning av en sammansättning:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^k \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gf"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Om f och g är linjär, då, gf är också linjär.

8. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kallas för **inverterbar** om för varje vektor $\vec{u}$ i $\mathbb{R}^n$ det finns bara en vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$ som avbildas till $\vec{u}$, dvs $f(\vec{v}) = \vec{u}$. Vi kan använda detta för att definiera inversen till f. Den är en funktion $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ som avbildar en vektor $\vec{u}$ till en vektor $\vec{v}$ om f avbildar $\vec{v}$ till $\vec{u}$, dvs, $f^{-1}(\vec{u}) = \vec{v}$ om och endast om $f(\vec{v}) = \vec{u}$.

9. Låt $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ och $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara linjära funktioner som ges av matriser A och B, dvs, $f(\vec{v}) = A\vec{v}$ och $g(\vec{w}) = B\vec{w}$.

Fråga: bestäm matrisen till sammansättningen $gf\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. Den borde vara en $m \times n$ matris.

Kolonnerna till matrisen till gf ges va:

$$gf(\vec{e}_i) = B(A\vec{e}_i) = (BA)\vec{e}_i$$

Vi kan konstatera:

10. **Proposition.** Låt $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ och $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara linjära funktioner som ges av matriser A och B. Matrisen till gf ges av matris multiplikation BA.

11. **Proposition.** Låt $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär funktion som ges av matrisen A. Då f är inverterbar om och endast om A är inverterbar. Om f är inverterbar, då f^{-1} är också linjär och den ges av matrisen A^{-1}:

$$f^{-1}(\vec{v}) = A^{-1}\vec{v}$$

12. **Slogan**: Vi identifierar linjära avbildningar med matriser. Genom denna identifikation, sammansättning, addition, subtration, inverterbara funktioner, inversen, motsvarar matris multiplikation, addition, subtration, inverterbara matriser, inversen. Identitet linjär avbildning motsvarar identitet matris.

13. $h(gf) = (hg)f$ som motsvara $C(BA)$=$(CB)A$. $(h+g)f = hf + gf$ som motsvarar $(C+B)A = CA + CA$. $\mathrm{id}\, f = f$ och $f\,\mathrm{id}$ som motsvarar $IA = A$ och $AI = A$, där I betecknar identitet matrisen.

14. **Uppgift.** Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en vridning i α radianer och $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara projektion på linjen $2x - 4y = 0$. Hitta standard matris till $f \circ g$ och $g \circ f$.

15. **Uppgift.** Betrakta följande linjär avbildning $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - y + z \\ y - z \\ x + z \end{bmatrix}$$

Hitta matrisen till f. Undersök om f är inverterar, och i så fall hitta inversen till f.

16. **Uppgift** Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär funktion så att:

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hitta matrisen till f och bestäm om f är inverterar.

17.

	linjära funktioner	matriser
	$f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$	$n \times k$ matris $\begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) & \cdots & f(\vec{e}_k) \end{bmatrix}$
	$A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ avbildar $\vec{x}$ till $A\vec{x}$	$n \times k$ matris A
nollrum	$\ker(f) = \{\vec{v} \text{ i } \mathbb{R}^k \mid f(\vec{v}) = \vec{0}\}$	lösningar till $A\vec{x} = \vec{0}$
	one to one	$A\vec{x} = \vec{0}$ har bara $\vec{0}$ för lösning
bildrum	$\operatorname{im}(f) = \{f(\vec{v}) \text{ i } \mathbb{R}^n \mid \vec{v} \text{ i } \mathbb{R}^k\}$	$\operatorname{span}(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_k))$
bildrum	$\operatorname{im}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}\right)$	$\operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}\right)$
	onto	$\operatorname{rang}(A) = n$
	sammansättning $\begin{tikzcd} \mathbb{R}^k \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gf"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$	matris multiplikation A är $n \times k$ matris och B är $m \times n$ matris BA är $m \times k$ matris
	$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är inverterbar	$n \times n$ matris $\begin{bmatrix} f(\vec{e}_1) & \cdots & f(\vec{e}_n) \end{bmatrix}$ är inverterbar.
	$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är inverterbar	$n \times n$ matris A är inverterbar.