KTH ROYAL INSTITUTE
OF TECHNOLOGY

EL1000/1120 Reglerteknik AK

Föreläsning 2:
Dynamik i återkopplade system och PID-reglering

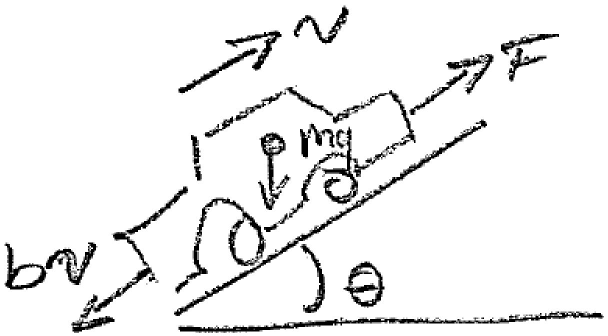
Mer kursinformation

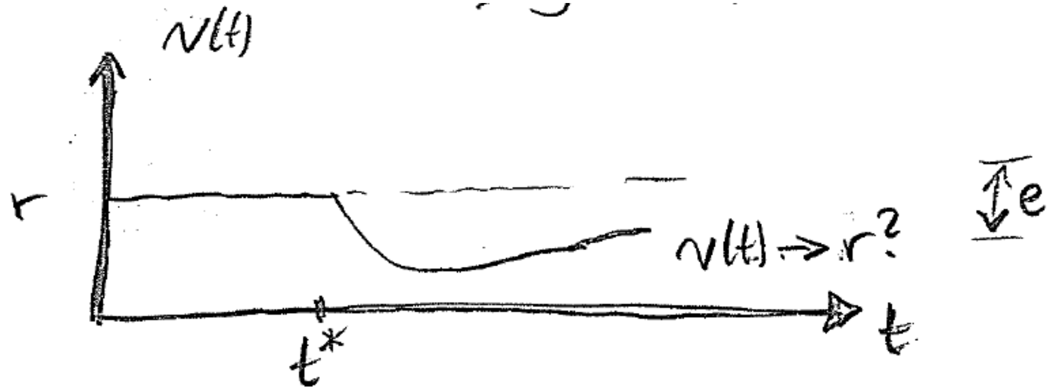
- Kurs-PM på kurshemsidan https://www.kth.se/social/course/EL1000/subgroup/ht-2015-cfate/page/start-omg-1-11/
- Labbokning under http://bilda.kth.se
- Lab3 kommer inte läggas upp riktigt än
- Glöm ej att registrera dig på kursen
- Kompendium finns på STEX (öppet 9.30-11.00 och 12.00-14.00) och att ladda ner på kurshemsidan
- Kursnämndsrepresentant från Maskin/Design/Indek?
- Föreläsning 3 (måndag 9/11) ges av Bo Wahlberg

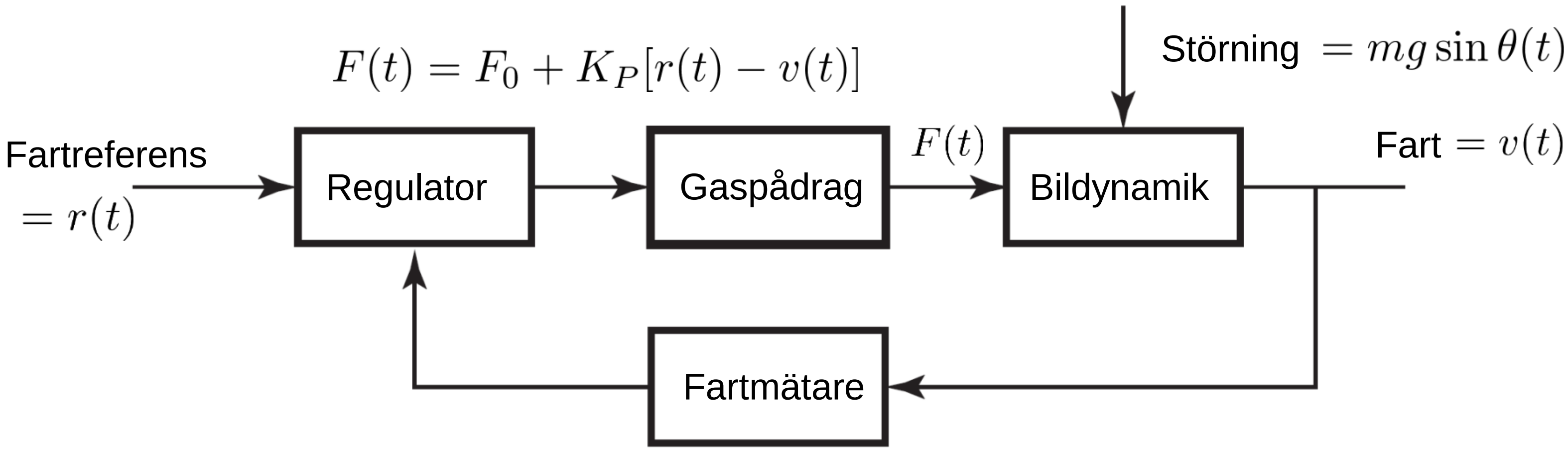
Dagens program

- Lösning av linjär differentialekvation (repetition)
  - Homogen och partikulär lösning
  - Laplacetransformen
- Analys av farthållare med PI-reglering
- Från differentialekvation till överföringsfunktion
- Poler och nollställen
- Stabilitet
- Slutna systems överföringsfunktion

Farthållning av bil med återkoppling (P-reg.)







Frågor

1. Hur ser insvängningsförloppet av stegsvar ut?

2. Kommer stegsvaret alls att svänga in? (Är det återkopplade systemet *asymptotiskt stabilt*?)

3. Finns det enklare sätt att räkna ut statiska reglerfel?

Svar: 1-2: Studera differentialekvation i detalj

1-3: Använd Laplacetransformen

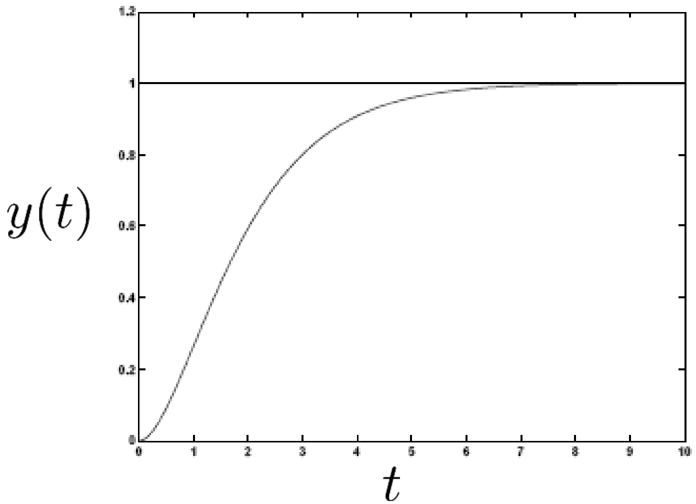
Lösning av differentialekvation

- Exempel: $\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2 y(t) = u(t),$
$$u(t) = 1,\ t > 0$$
- *Alla* lösningar kan skrivas på formen:
$$y(t) = y_{\text{part.}}(t) + y_{\text{hom.}}(t)$$
- En partikulär lösning är $y_{\text{part.}}(t) = \dfrac{1}{a_2}$
- Homogen lösning (alltså $u(t) = 0$)
$y_{\text{hom.}}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad C_1,\, C_2$ valbara konstanter
- Karakteristisk ekvation $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$

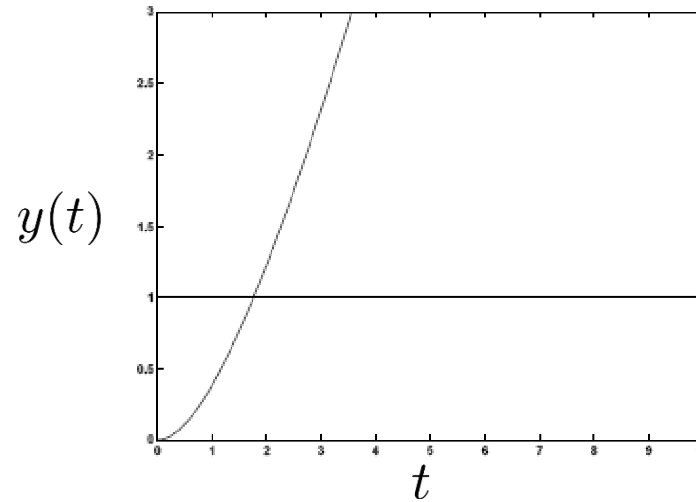
Lösningens principiella utseende

$$y(t) = \frac{1}{a_2} + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

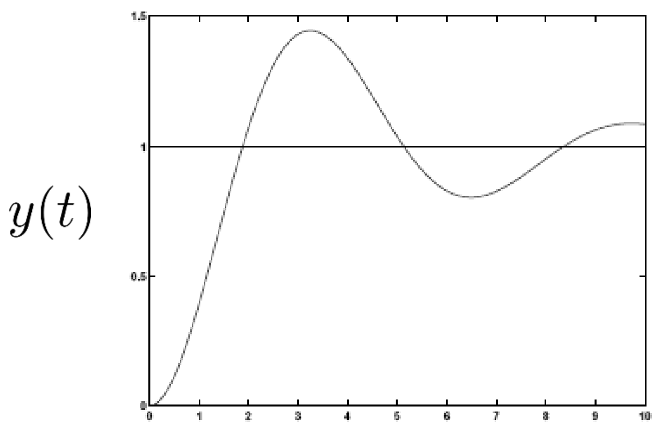
λ reella och negativa:



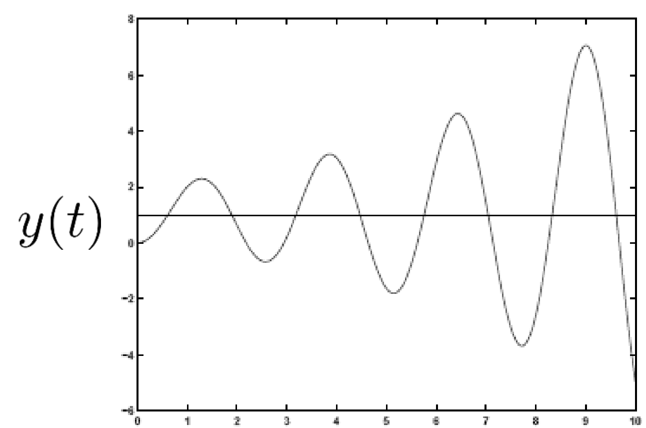
λ reella och positiva:



λ komplexa och $Re(\lambda) < 0$:



λ komplexa och $Re(\lambda) > 0$:



Laplacetransformen

- Definition:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

- Exempel: $f(t) = 1 \ , \quad t \geq 0$ (steg)

$$F(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Egenskaper

(i) Entydighet $f(t) \Leftrightarrow F(s)$. Tabell!

(ii) Linjäritet $\mathcal{L}\left[af(t) + bg(t)\right] = aF(s) + bG(s)$

(iii) Derivering: $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$

Allmänt: $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s)$ om $f(0) = \dot{f}(0) = \ldots = 0$

(iv) Integration $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$

(v) Faltning $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] = F(s)G(s)$

(vi) Slutvärdesatsen:

$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

om slutvärdet existerar

Exempel med Laplacetransformen

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2 y(t) = u(t), \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0, \; u(t) = 1$$

$$\Downarrow \mathcal{L}$$

$$s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_2 Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + a_1 s + a_2)} = \frac{1}{s(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}$$

$$\Downarrow \mathcal{L}^{-1} \quad (tabell)$$

$$y(t) = \frac{1}{a_2} + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

(med c_1, c_2 valda så att $y(0) = \dot{y}(0) = 0$)

Tabell från Glad & Ljung

Några stegsvar

Nedan följer stegsvaren till några vanliga överföringsfunktioner.

$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\frac{1}{s}\right]$	
1	1	(A.28)
$\frac{1}{s}$	t	(A.29)
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{t^2}{2}$	(A.30)
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^n}{n!}$	(A.31)
$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{a^n}\left\{1-\left(1+at+\ldots+\frac{a^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-at}\right\}$	(A.32)
$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$	(A.33)
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab}\left(1-\frac{be^{-at}-ae^{-bt}}{b-a}\right)$	(A.34)

Laplacetransformen

- Känns detta svårt eller obekant?
- Repetitionsseminarium: Laplacetransformen
- Onsdag 4 november kl. 8-10 i sal H1

Frågor

1. Hur ser insvängningsförloppet av stegsvar ut?

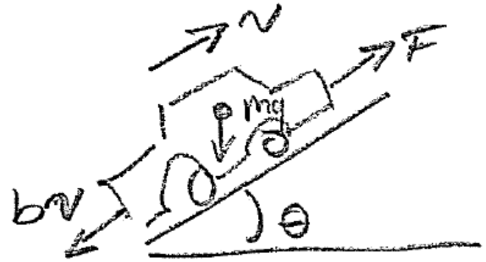
2. Kommer stegsvaret alls att svänga in? (Är det återkopplade systemet *asymptotiskt stabilt*?)

3. Finns det enklare sätt att räkna ut statiska reglerfel?

Svar: 1-2: Studera differentialekvation i detalj

1-3: Använd Laplacetransformen

Exempel igår: Farthållning av bil



- Bilens dynamik $$\dot{v}(t) = \frac{1}{m}F(t) - g\sin\theta(t) - \frac{b}{m}v(t)$$
- Reglerfelet $$e(t) = r(t) - v(t)$$
- PI-regulator $$F(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)d\tau$$

- K_P och K_I valbara parametrar. Hur beror stegsvaren på dem?
- $K_I = 0$ ger statiskt fel ($\lim_{t\to\infty} e(t) \neq 0$, visade vi på Frl.1)

Farthållare: Överföringsfunktioner för sluten loop från tavlan

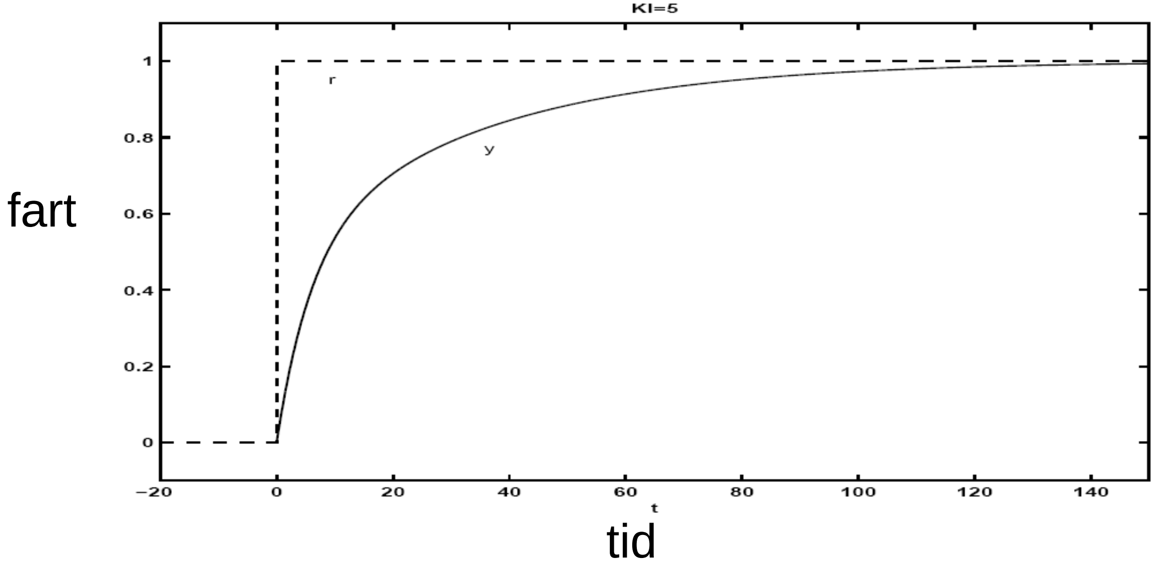
$$Y(s) = \frac{(K_P s + K_I)/m}{s(s+b/m) + (K_P s + K_I)/m} R(s) - \frac{s/m}{s(s+b/m) + (K_P s + K_I)/m} D(s)$$

(Kom ihåg: $y(t) = v(t)$ och $d(t) = mg \sin\theta(t)$
$\mathcal{L}y(t) = Y(s), \mathcal{L}d(t) = D(s), \mathcal{L}r(t) = R(s)$)

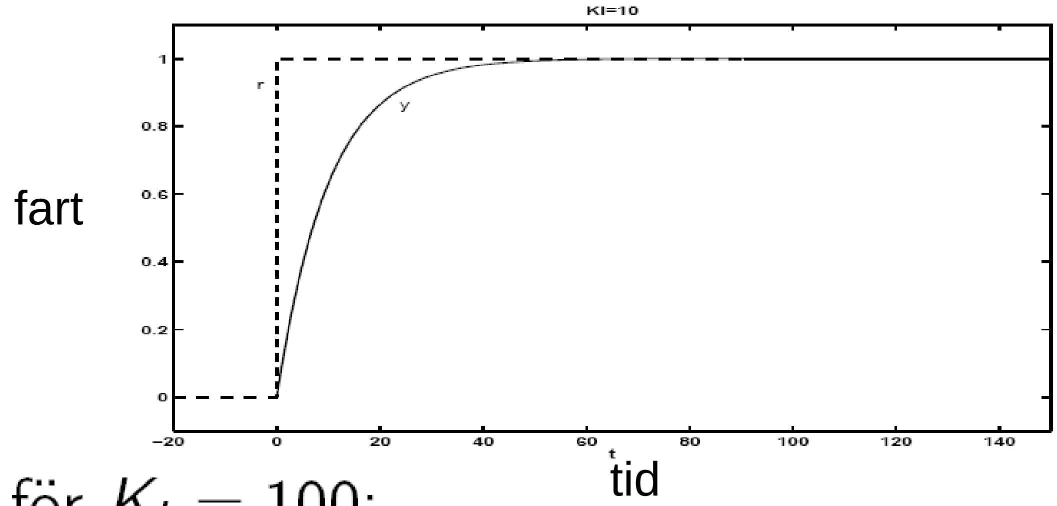
Farthållning av bil

- Studera fallet $m = 1000$ och $b = 100$.
- Betrakta utsignalen $y(t)$ (hastigheten) för steg i börvärdet $r(t)$ (referenshastiget) för olika K_I. Anta $K_P = 100$.

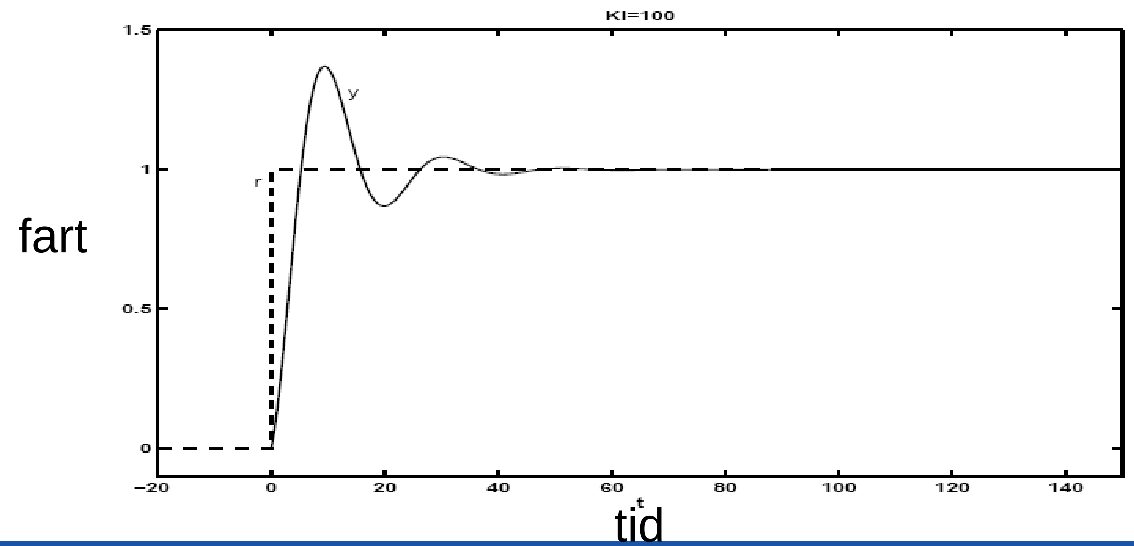
- Stegsvar för $K_I = 5$:



- Stegsvar för $K_I = 10$:



- Stegsvar för $K_I = 100$:



Quiz

(1) En funktion $y(t)$ har Laplacetransformen

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s} - \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

Vad är funktionens värde när $t \to \infty$

a) 0

b) 1

c) $\frac{1}{2}$

d) ∞

---

(2) En funktion $y(t)$ har laplacetransformen

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s} - \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

Vad är funktionens utsignal när $t \to \infty$

a) 0

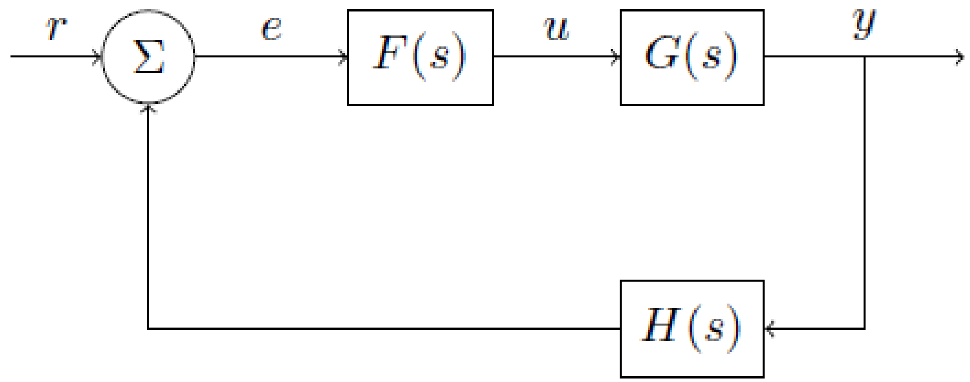
b) 1

c) ∞

d) Det går inte att säga med de kunskaper som kursen lärt ut.

Quiz

(3)



Vilket alternativ beskriver överföringsfunktionen mellan r och e?

(a) $\dfrac{1}{1 + FGH}$

(b) $\dfrac{1}{1 - FGH}$

(c) $\dfrac{1}{FGH - 1}$

(d) 1