Laplacetransformen - en repetition inför Reglerteknik AK

Jonas Mårtensson

6 november 2013

Inom reglertekniken används Laplacetransformen ofta för att beskriva och analysera dynamiska system. Det här dokumentet ger en enkel sammanfattning av Laplacetransformen, men det är ingen komplett framställning utan ska endast ses som ett repetitionsmaterial. Om grundläggande kunskaper saknas så hänvisar vi till litteraturen som används i mattekurserna.

Fouriertransformen

Vi utgår från Fouriertransformen, som kan tänkas vara mer intuitiv och välkänd än Laplacetransformen. Med hjälp av Fouriertransformen kan en signal $u(t)$ skrivas som en (oändlig) summa av svängningar $e^{i\omega t} = cos\omega t + i\sin\omega t$ med olika frekvens ω:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad \text{(invers Fouriertransform)}$$

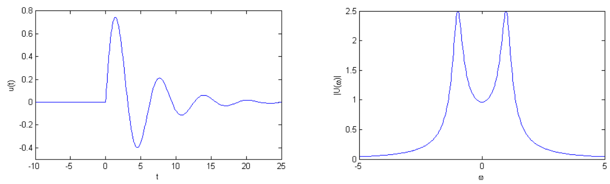
Viktningen av olika frekvenser ges av Fouriertransformen $U(\omega)$, som alltså är en funktion av frekvensen ω, och som definieras som

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}dt \quad \text{(Fouriertransform)}$$

Vi tittar på ett exempel. Låt $u(t)$ vara en sinusvåg med frekvens ω_o, som startar vid $t = 0$ och där amplituden avtar exponentiellt:

$$u(t) = \begin{cases} e^{-at}sin(\omega_o t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow U(\omega) = \frac{\omega_o}{\omega_o^2 + (a + i\omega)^2}$$

Fouriertransformen $U(\omega)$ är alltså komplexvärd trots att signalen $u(t)$ är reell, och beloppet av $U(\omega)$ kan tolkas som *frekvensinnehållet* i signalen $u(t)$. Nedanstående figur visar signalen $u(t)$ och frekvensinnehållet $|U(\omega)|$ och vi ser tydligt topparna vid $\pm\omega_o = \pm 1$.



Figur 1: Signalen $u(t)$ och dess Fouriertransform $U(\omega)$.

Fouriertransformen ger en intuitiv frekvensbeskriving av signaler och den är användbar vid till exempel filterdesign. Nackdelen är att det bara går att behandla begränsade, absolut integrerbara[1], funktioner $u(t)$ och vi vill ju även studera instabila system där signalerna växer obehindrat. Som tur är finns Laplacetransformen.

Laplacetransformen

Även om $u(t)$ inte skulle vara absolut integrerbar så kan det hända att $u(t)e^{-\sigma t}$ är det för något reellt σ. Då kan vi ta Fouriertransformen av den nya funktionen

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-\sigma t}e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-st}dt$$

där vi i den sista likheten har introducerat den komplexa variablen $s := \sigma + i\omega$. Integralen ovan kan nu betraktas som en funktion av s. Innan vi går vidare ska vi begränsa oss till funktioner $u(t)$ som är identiskt lika med noll för $t < 0$, precis som vi gjorde i Fourierexemplet ovan, och det innebär att den undre integrationsgränsen kan sättas till 0 istället för $-\infty$. Nu kan vi definiera den (enkelsidiga) Laplacetransformen[2]

$$U(s) = \mathcal{L}u(s) = \int_{0}^{\infty} u(t)e^{-st}dt \quad \text{(Laplacetransform)}$$

Laplacetransformen är definierad för de s där integralen ovan är konvergent och det går att visa att det motsvarar ett halvplan $\{s : \mathrm{Re}\, s > \sigma_o\}$ för något reellt σ_o som beror på hur $u(t)$ ser ut. Med hjälp av den inversa Laplacetransformen kan en signal $u(t)$, $(t \geq 0)$, tolkas som en (oändlig) summa av avtagande eller ökande svängningar $e^{st} = e^{\sigma t}(cos\omega t + i \sin \omega t)$:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} U(s)e^{st}ds, \quad \sigma_1 > \sigma_o, \quad t \geq 0 \quad \text{(invers Laplacetransform)}$$

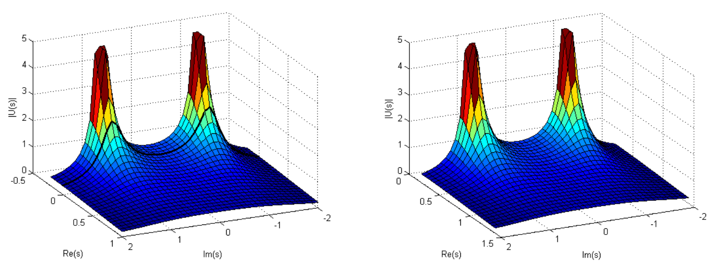
[1] $u(t)$ är absolut integrerbar om $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|dt < \infty$

[2] Ibland använder vi skrivsättet $U(s) = \mathcal{L}[u(t)](s)$ eller $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ där variablen s är underförstådd.

Nu kan vi titta på exemplet från tidigare igen

$$u(t) = \begin{cases} e^{-at} sin(\omega_o t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow U(s) = \frac{\omega_o}{\omega_o^2 + (a+s)^2} \tag{1}$$

där $U(s)$ nu är definierad för $\operatorname{Re} s > -a$. I vänstra grafen i figuren nedan visas beloppet av $U(s)$ över en del av det komplexa talplanet där den är definierad. I punkterna $s = -a \pm \omega_o$ blir $U(s)$ singulär och amplituden går mot oändligheten. Eftersom den imaginära axeln är del av definitionsmängden så existerar även Fouriertransformen av $u(t)$, vilket vi ju redan visste, och den har ritats ut som en svart linje i plotten. Laplacetransformen och Fouriertransformen sammanfaller alltså på den imagínära axeln, $U_{\mathcal{L}}(i\omega) = U_{\mathcal{F}}(\omega)$, men tänk på att Laplacetransformen måste vara definierad på imaginära axeln för att det ska gälla.

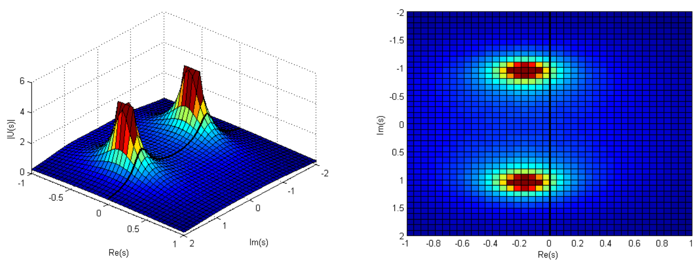


Figur 2: Laplacetransformen $U(s)$ och Fouriertransformen $U(\omega)$ (svarta linjen).

Låt oss nu fundera på hur det skulle sett ut om $u(t)$ varit en sinus med exponentiellt ökande amplitud istället, $e^{at} sin(\omega_o t)$. Då hade Laplacetransformen varit $U(s) = \frac{\omega_o}{\omega_o^2 + (-a+s)^2}$ vilket motsvarar en translation av den tidigare funktionen $2a$ enheter i positiv riktning längs den reella axeln. Beloppet av funktionen finns återgiven i den högra grafen i figuen nedan. Definitionsmängden hade varit $\operatorname{Re} s > a$ vilket inte innefattar imaginära axeln och detta stämmer ju också med det vi redan vet; att funktionen saknar Fouriertransform eftersom den inte är absolut integrerbar.

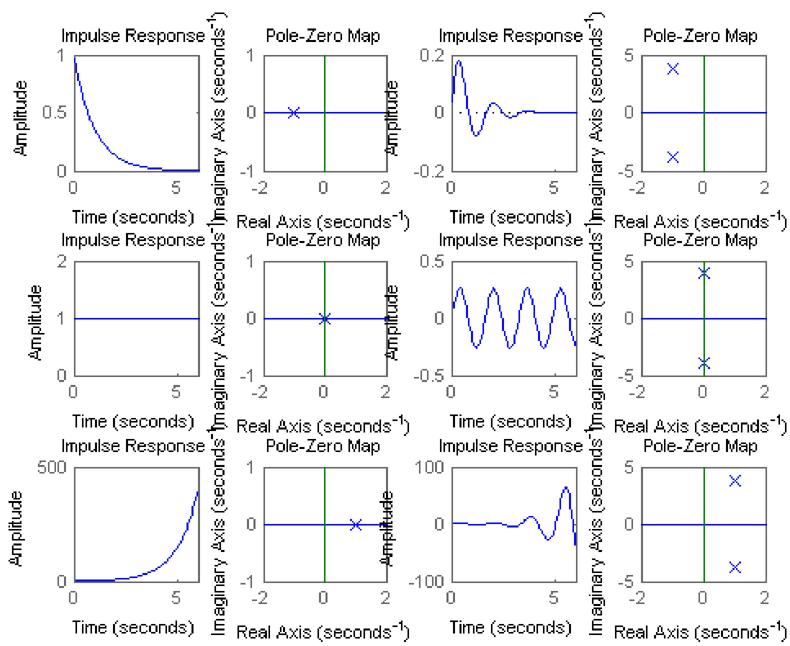
Analytisk fortsättning

Betrakta funktionen $U(s)$ i (1). Det går att utvidga definitionsmängden för funktionen till hela det komplexa talplanet utom punkterna $s = -a \pm \omega_o$ där den är singulär. Dessa punkter kallas poler till funktionen $U(s)$.



Figur 3: Analytisk fortsättning av funktionen $U(s)$ i (1) med poler i $-a \pm \omega_o$.

Figuren nedan visar typiska signaler i tidsplanet och deras Laplacetransformer som poler i det komplexa talplanet.



Figur 4: Signaler $u(t)$ och motsvarande poler for $U(s)$.

Några räkneregler och vanliga transformpar

För $G(s) := \mathcal{L}[g(t)](s)$ och $F(s) := \mathcal{L}[f(t)](s)$ så gäller
Entydighet:

$$g(t) = f(t) \Leftrightarrow G(s) = F(s)$$

Linjäritet:

$$\mathcal{L}[\alpha g(t) + \beta f(t)](s) = \alpha G(s) + \beta F(s)$$

Tidsförskjutning:

$$\mathcal{L}[g(t-a)](s) = e^{-as}G(s)$$

Derivering:

$$\mathcal{L}[\frac{d}{dt}f(t)](s) = sF(s) - f(0)$$

Integrering:

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau](s) = \frac{F(s)}{s}$$

Faltning:

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau](s) = F(s)G(s)$$

Impuls, deltafunktion:

$$g(t) = \delta \Leftrightarrow G(s) = 1$$

Steg:

$$g(t) = 1 \Leftrightarrow G(s) = \frac{1}{s}$$

Ramp:

$$g(t) = t \Leftrightarrow G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Exponentialfunktion:

$$g(t) = e^{at} \Leftrightarrow G(s) = \frac{1}{s-a}$$

Differentialekvationer och överföringsfunktioner

Vi börjar med ett exempel. Antag att vi har ett system som beskrivs enligt följande differentialekvation

$$\frac{d}{dt}y(t) = -ay(t) + bu(t), \quad y(0) = y_o \tag{2}$$

där vi kan låta $u(t)$ vara ett steg, dvs $u(t) = 1, t \geq 0$. Lösningen ges av summan av en partikulärlösning, t.ex. $y_p(t) = b/a$, och den homogena lösningen $y_h(t) = Ce^{-at}$ för något C. Värdet på C kan bestämmas från begynnelsevillkoret $y(0) = y_o$

$$\begin{aligned} y(0) = y_p(0) + y_h(0) &= \frac{b}{a} + C = y_o \Rightarrow C = y_o - \frac{b}{a} \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{b}{a} + \left(y_o - \frac{b}{a}\right)e^{-at} = \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at}\right) + y_o e^{-at} \end{aligned} \tag{3}$$

Om vi låter $Y(s) := \mathcal{L}[y(t)](s)$ och $U(s) := \mathcal{L}[u(t)](s)$ och använder räknereglerna ovan för att ta fram Laplacetransformen av (2) får vi

$$\begin{aligned} &sY(s) - y_o = -aY(s) + bU(s) \\ \Rightarrow &Y(s) = \frac{b}{s+a}U(s) + \frac{y_o}{s+a} = \frac{b}{s+a}\frac{1}{s} + \frac{y_o}{s+a} = \frac{b}{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right) + \frac{y_o}{s+a} \end{aligned}$$

och transformerar vi tillbaka till tidsdomänen får vi naturligtvis samma svar som i (3). Oftatst är vi inte intresserade av bidraget från initialvärdet y_o och antar därför att detta är 0. Då kan vi återigen betrakta ekvationen ovan

$$Y(s) = \frac{b}{s+a}U(s) = G(s)U(s) \tag{4}$$

där vi inför beteckningen $G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s)$ för *överföringsfunktionen* från U till Y. Med hjälp av faltningsformeln får vi

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t be^{-a\tau} \cdot 1 d\tau \\ &= \left[-\frac{b}{a}e^{-a\tau}\right]_0^t = \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

vilket förstås också överensstämmer med (3).

För en generell linjär differentialekvation med reella koefficienter är överföringsfunktionen en rationell funktion av s, det vill säga

$$G(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

där $A(s)$ och $B(s)$ är polynom. Polerna för $G(s)$ ges alltså av nollställena för polynomet $A(s)$.

Slutvärdessatsen

Slutvärdessatsen är användbar för att räkna ut vad en signal $y(t)$ konvergerar mot då $t \to \infty$, vilket kan motsvara vad utsignalen ställer in sig på när systemet nått jämvikt. Under förutsättning att en sådan jämviktspunkt existerar så säger slutvärdessatsen att

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

Låt oss kontrollera detta för systemet (4) som vi vet är stabilt och där (5) ger att $\lim_{t\to\infty} y(t) = b/a$. Enligt slutvärdessatsen ges slutvärdet av

$$\lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{b}{s+a}\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{b}{s+a} = \frac{b}{a}$$

vllket är korrekt svar. Notera att slutvärdessatsen bara är giltig då gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} y(t)$ existerar.