Om mätningar i allmänhet

Om mätningar inte stämmer med en teori man ställt upp kan det bero på flera saker, t.ex. någon av följande.

i. Teorin är fel (och mätningen bevisar det).
ii. Teorin är nästan rätt, men något som inte täcks av teorin påverkar mätningarna (t. ex. relativistiska effekter, diffraktion, reflexer, eller störningar från andra källor).
iii. Det finns ett systematiskt fel i mätningen som gör att alla mätvärden blir för stora, eller för små. Denna typ av fel kan man antingen eliminera eller kompensera för.
iv. Det finns ett slumpmässigt fel som uppkommer pga avläsaren eller mätapparaturens bristande upplösning. Det är denna feltyp som kan hanteras med upprepade mätningar och felanalys.
v. Mätfel som beror på avläsningsfel, slarv eller bristande anteckningar. Även proffs på mätning drabbas av sådana fel, och att helt eliminera dem är omöjligt. Men var uppmärksam och noggrann, så minskar du risken.

Obs! Denna beskrivning är mycket förenklad och praktiskt inriktad, och tar inte hänsyn till skillnader och distinktioner som är viktiga inom statistiken.

Flera mätningar av samma punkt

Om vi gör upprepade mätningar av samma sak, borde vi kunna lista ut dels ungefär hur stort värdet är, dels hur mycket mätningarna varierar. Om t.ex. 20 personer mäter en sträcka *x* med varsitt måttband, kommer de säkert inte att få samma resultat. Den bästa sammanfattningen av deras mätningsmöda är medelvärdet

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \cdots + x_N)\text{där}$$

Felet kan beskrivas på två sätt: dels som det absoluta felet Δx, och dels som det relativa felet $\Delta x / x$. Båda ger ett mått på hur mycket mätvärdet varierar, men det absoluta felet ges i detta fall i meter, medan det relativa ges i procent.

Det finns flera tänkbara sätt att ta fram felet, och en del av dem listas nedan för det absoluta felet. De är inte likvärdiga – några av dem är bra, några OK, och några rent dåliga. När du gör laborationerna, se till att använda lämplig metod! Nedan antar vi att $\Delta_n = x_n - \bar{x}$.

- Ta medelvärdet av felen:

  $$\Delta x = \frac{1}{N}(\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_N)\,. \qquad (1)$$

  Obs! Vad du gör, använd inte denna metod! Kan du tänka ut varför? Diskutera med labhandledaren om du känner dig osäker.
- Ta största skillnaden mellan två mätvärden:

  $$\Delta x = |x_n - x_m|_{max}\,.$$

  Något bättre än ekvation 1, men oftast inte så bra. Kan du se varför? Kommer felet att över- eller underskattas? Kan duga för snabb skattning om du har väldigt få mätvärden.
- Ta medelvärdet av absolubeloppen av felen:

  $$\Delta x = \frac{1}{N}(|\Delta_1| + |\Delta_2| + \cdots + |\Delta_N|)\,.$$

  Denna metod är betydligt bättre än ekv. 1, men har också inneboende problem.

- Ta medelvärdet av kvadraten av felen, och dra roten ur detta medelvärde:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{N}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_N^2)}\,. \tag{2}$$

  Nu börjar det likna något. Men detta fel förblir ungefär detsamma, oavsett hur många mätningar vi gör. Det är felet (eller mätosäkerheten) du kan förvänta dig, om du gör en enda mätning. Ibland kallas det *standardavvikelse* (eng. *standard deviation*) och ibland *root mean square error* (RMSE). Den finns även i en variant där man delar med $N-1$ istället för N:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{N-1}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_N^2)}\,. \tag{3}$$

  Ekvation 3 är oftast mer korrekt än ekvation 2, men skillnaden är liten och på den här kursen bryr vi oss inte så mycket.
- Summera kvadraten av felen, dra roten ur dem och dela med N:

$$\Delta x = \frac{1}{N}\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_N^2}\,. \tag{4}$$

  Det är samma som ekvation 2, men delat med $\sqrt{N}$. Till skillnad från uttrycken ovan, tar detta värde hänsyn till hur många mätningar vi gjort. Ju fler mätningar vi gör, desto mindre blir felet. Det här är mätosäkerheten hos medelvärdet, och alltså ett lämpligt uttryck för felet hos medelvärdet av våra 20 längdmätningar. På engelska kallas den för *standard error of the mean*. Liksom för ekvation 2 finns det ytterligare en variant:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_N^2)}\,. \tag{5}$$

  Ekvation 5 är sannolikt mer korrekt i en normal mätsituation. På denna kurs (och med många mätvärden) spelar det dock ingen roll om du väljer ekvation 4 eller 5!

Fortplantning av fel

Tidigare mätte 20 personer en sträcka x med ett visst fel Δx. Antag nu att alla 20 står med varsitt stoppur, och mäter hur lång tid t det tar för en bil att köra sträckan x. Då får de också fram felet Δt. Sedan räknar de ut bilens konstanta hastighet $v = s/t$. Vad blir då felet Δv hos den beräknade hastigheten?

Vi ställer frågan på ett mer allmänt sätt. Om vi mäter tre (eller två, eller fler) storheter x,y och z, får vi samtidigt deras absoluta fel Δx, Δy och Δz. Sedan vill vi beräkna storheten $g = g(x, y, z)$. Vad blir då absoluta felet Δg?

Felet i g kan då, i linjär approximation, fås som summan av felbidragen:

$$\Delta g = \frac{\partial g}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial g}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial g}{\partial z}\Delta z$$

där derivatorna först beräknas algebraiskt ur sambandet $g = g(x, y, z)$, varefter man sätter in de uppmätta värdena $\bar{x}$, $\bar{y}$ och $\bar{z}$ och får ett numeriskt värde. Detta är egentligen bara definitionen av en differential.

Det kan noteras att egentligen ska ekvationen skrivas med absolutbelopp överallt:

$$\Delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial g}{\partial z}\right| \Delta z \qquad (6)$$

Varianten utan absolutbelopp duger, om du själv kommer ihåg att använda positiva värden!

Detta gäller bara **i linjär approximetion** dvs om felen är små. Som en tumregel kan du ha att alla relativa fel (alltså även summan av dem) ska vara under 0,2.

Ett användbart speciallfall är när storheterna ingår enbart i första potens (i täljare eller nämnare). Ett typfall är just hastighetsberäkningen $v = s/t$, där vi finner att

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{t} = \frac{s}{t} \cdot \frac{1}{s} = \frac{v}{s}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{s}{t^2} = -\frac{s}{t} \cdot \frac{1}{t} = -\frac{v}{t}$$

När vi sätter in detta i ekvation 6, försvinner minustecknet och vi får det absoluta felet

$$\Delta v = \frac{v}{s}\Delta s + \frac{v}{t}\Delta t$$

vilket vi också kan uttrycka som det relativa felet

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta t}{t}.$$

I det mer allmänna fallet blir det

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$$

Eller med ord: **Relativa felet i den beräknade storheten är lika med summan av de relativa felen i mätstorheterna**. Men detta gäller bara om uttrycket är fritt från högre potenser eller andra funktioner (som cos, log mm). Och om relativa felen är små!

Om någon storhet förekommer i högre potens syns denna som faktor framför dess relativa fel. Om vi t.ex. har $g(x, y, z) = xy^2z^3$, så blir det relativa felet

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta x}{x} + 2\frac{\Delta y}{y} + 3\frac{\Delta z}{z}.$$

Exempel

Med exponentiella storheter kan de bli rätt märkligt. Ta ljudintensitetsnivån β, som mäts i dB och ljudintensitet I som mäts i W/m²:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \qquad \Rightarrow \qquad I = I_0 10^{\beta/10}$$

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = I_0 10^{\beta/10} \frac{\ln 10}{10} = I \frac{\ln 10}{10}$$

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\partial I}{\partial \beta}\frac{\Delta \beta}{I} = \frac{\ln 10}{10}\Delta\beta \approx 0{,}23\Delta\beta\,.$$

Det märkliga är att absoluta felet i intensitet är proportionellt mot relativa felet i ljudinstenitetsnivå (fast enheterna stämmer i alla fall).

Fortplantning av fel – alternativ

Vi står med våra 20 personer som alla mätt sträcka x och tid t. Ett alternativ är att låta dem alla räkna ut varsitt värde på hastigehten, så vi får $v_1, v_2, \cdots, v_{20}$. Sedan beräknar vi medelvärdet av dessa, och använder ekvation 4 eller 5 till att beräkna felet. Notera att denna metod endast fungerar om vi har tillgång till ursprungliga data, och om alla storheter mätts lika många gånger (i par).

Om relativa felen är lite större, eller om man vill vara mer noggrann med statistiken, kan man gå vidare till Gaussisk felfortplantning. Då ges felet av

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2 \Delta z^2}$$

Detta uttryck använder vi inte på denna kurs, men man stöter ofta på det. Det är bra att veta att det finns.

Slutligen

Tänk dig alltid för när du hanterar mätvärden och mätfel! Får du ett orimligt svar, är det troligtvis något fel. Och vill du verkligen ha ett visst svar, är risken stor att du får det svaret (oavsett om det stämmer eller ej).

Felaktig felhantering är vanligt. Oftast beror det på okunskap – statistik och felhantering är betydligt mer avancerat än vad som beskrivs här, och att få allt rätt är inte lätt ens för den invigde. Ibland handlar det tyvärr även om oärlighet: med en studies utforming, med mätdata eller hur mätdata sedan hanteras.